# ***Unidad 1.*** Intervalos. Ecuaciones, inecuaciones. Valor absoluto.

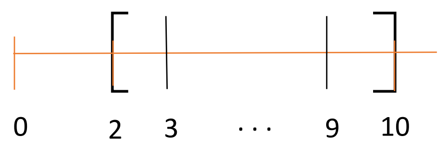
## ***Intervalos***

Un intervalo es un subconjunto. Por ejemplo, si tenemos un conjunto ¨{a, b, c, d}. Serán subconjuntos: {b; c} ó {a; d} ó {b, d}, etc.

A nosotros nos va a interesar aplicar esto al ámbito de la matemática y de los distintos conjuntos de números. Tales cómo los Reales ($\mathbb{R}$), los Enteros ($\mathbb{Z}$), los Racionales ($\mathbb{Q}$), etc.

### ***Ejemplo 1***

Representar en la recta el intervalo comprendido entre [2; 10] dentro de los números naturales.



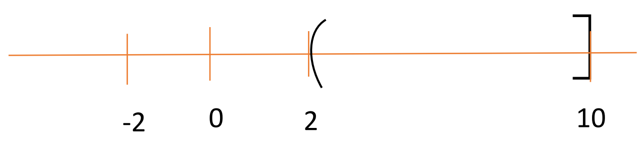

En éste caso, solo los números naturales serán pare de nuestro intervalo, es decir, que el intervalo, llamémoslo A, es $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Los infinitos números que se encuentran comprendidos entre cada uno de los números no nos interesan ya que solo trabajamos con los Naturales.

Además, podemos ver que tenemos dos corchetes ([]), lo cual indica que los números al final de nuestro intervalo están incluidos. Entonces, los extremos pertenecen al conjunto. Este tipo de intervalos se llaman ***Intervalos cerrados.***

$$[a;\ b] = \{x \in \Re\colon a \leq x \leq b\}$$

### ***Ejemplo 2***

Representar en la recta el intervalo comprendido entre (2; 10]




Pero… ¿qué quiere decir esto?

En este caso, tenemos un subconjunto comprendido entre el número 2 y el número 10. En este caso habría que hacer foco en dos cosas. En primer lugar, podemos ver que en una parte tenemos un paréntesis y en otra un corchete.

El paréntesis quiere decir que el número 2 no está incluido en nuestro intervalo, pero el corchete si incluye al número 10 en nuestro intervalo. Este tipo de intervalos se denominan ***Intervalos semiabiertos.***

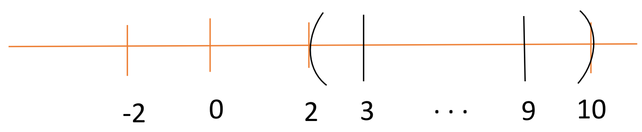
$$(a;\ b] = \{x \in \Re : a < x \leq b\}$$

$$[a;\ b) = \{x \in \Re : a \leq x < b\}$$

Además se puede observar que se han marcado todos los puntos comprendidos entre estos dos números, por lo que podemos decir que estamos trabajando con los números Reales (ℝ).

***Ejemplo 3***

Representar en la recta el intervalo (2;10) perteneciente al conjunto ℤ (números enteros).




En éste último ejemplo podemos ver que es bastante similar al primero. Sin embargo, hay dos diferencias. En primer lugar, se puede apreciar que en nuestra recta aparece marcado el -2 (menos dos). Esto es porque ya no trabajamos solamente con los Naturales sino con los Enteros y estos comprenden a los números negativos.

Por otra parte, estamos utilizando paréntesis, esto indica que los números 2 y 10 no están incluidos en nuestro intervalo. Este tipo de intervalos se denominan ***Intervalos abiertos.***

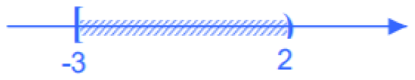
$$(a;\ b) = \{x \in \Re : a < x < b\}$$

***Más ejemplos***

1. El intervalo abierto (-3; 2) = $\{x \in \Re: -3 < x < 2\}$ lo representamos


2. El intervalo cerrado [-3; 2] = $\{x \in \Re: -3 \leq x \leq 2\}$ lo representamos

3. El intervalo semiabierto (o semicerrado) $[-3; 2) = \{x \in \Re: -3 \leq x < 2\}$ lo representamos




4. El intervalo $(-3, +\infty) = \{x \in \Re: x > -3\}$ lo representamos


5. El intervalo $(-\infty; 2] = \{x \in \Re: x \leq 2\}$ lo representamos


## *Operaciones con intervalos*

Puede pasar que nos pidan realizar algunas operaciones entre estos intervalos. Éstas son **Unión, Intersección** y **Diferencia.**

### *Unión de A y B*

Se denomina **Unión de A y B** al conjunto formado por los elementos comunes y no comunes de A y de B.

Es decir que si tenemos el conjunto $A = \{2; 3; 4; 5; 8; 12\}$ y el conjunto $B = \{3; 4; 5\}$. La Unión de A y B resultará en $C = \{2; 3; 4; 5; 8; 12\}$

Lo denotamos $A \cup B$ (se lee A unión B). En símbolos: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$ (El símbolo $\vee$ significa “o”).

### *Intersección de A y B*

Se denomina ***Intersección de A y B*** al conjunto formado por los elementos comunes de A y de B.

Siguiendo el ejemplo anterior, la intersección de A y B sería $C = \{3; 4; 5\}$

Lo denotamos $A \cap B$ (se lee A intersección B). En símbolos: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$ (El símbolo $\wedge$ significa “y”)

***Diferencia entre A y B*** al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B.

De nuevo, tomando en cuenta A y B definidos anteriormente, la diferencia entre estos resultaría en $C = \{2; 8; 12\}$

Lo denotamos A - B (se lee A menos B). En símbolos: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Veamos ahora algunos ejemplos

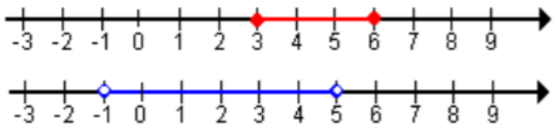
***Ejemplo 1***

Dados los intervalos A = [3, 6] y B = (-1; 5), hallar $A \cup B$ y $A \cap B$

Representemos ambos conjuntos sobre la recta real.

En rojo el intervalo [3, 6] = $\{x \in \Re / 3 \leq x \leq 6\}$.

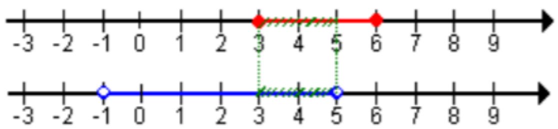
En azul el intervalo (-1; 5) = $\{x \in \Re / -1 < x < 5\}$.




Del gráfico podemos observar que los elementos que están en $A \cup B$ son los que pertenecen al intervalo (-1; 6]. Luego:

$$A \cup B = (-1;\ 6] = \{x \in \Re / -1 < x \leq 6\}.$$

Para hallar la intersección, debemos determinar los elementos comunes a amos conjuntos.




Los indicamos con el sombreado en verde. Vemos que los que están simultáneamente en ambos conjuntos son los que pertenecen al intervalo [3; 5). Luego

$$A \cap B = [3;\ 5). = \{x \in \Re / 3 \leq x < 5\}$$

***Ejemplo 2***

Determinar A – B si A = $\Re$y B = [- 2; 4)

Recordemos que la diferencia A – B está formada por los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen a B.

En el ejemplo A – B es el conjunto de los números que pertenecen a los reales y que no pertenecen al intervalo [-2; 4)

Representamos en la misma recta ambos conjuntos.


En este caso el punto 2 se encuentra vacío ya que no esta incluido en el conjunto y el punto 4 si está marcado porque pertenece al conjunto.

Observamos qué x = 2 pertenece tanto a $\Re$ como al intervalo [- 2; 4). Entonces x = 2 no pertenece a la diferencia de los conjuntos.

Tampoco pertenecen a la diferencia todos los puntos pintados con azul.

$$A - B = \{x \in \mathbb{R}/(-\infty; 2) \wedge [4; +\infty)\}$$

## *Ecuaciones, inecuaciones*

### *Ecuaciones*

En matemática es habitual trabajar con relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se denominan ***incógnitas o variables*** y se representan por letras.

Aquellas expresiones en las que intervienen números y letras, vinculadas mediante operaciones aritméticas se denominan expresiones algebraicas.

***Ejemplo***

$$2x - 3$$

$$m^2 - 2m$$

$$x + y^2 = 5$$

Cuando una igualdad algebraica es cierta para algunos valores en su dominio de definición se dice que es una ***ecuación***.

Una ecuación es una igualdad que contiene uno o más números desconocidos llamados incógnitas.

En este apartado trataremos ecuaciones con una sola incógnita. Habitualmente a la incógnita la denominamos "x"

***Ejemplos***

$$3x + 2 = 4x - 1$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$|x - 3| = 2$$

Cada valor de la variable que al sustituirlo en la ecuación, hace que la misma se transforme en una igualdad numérica se denomina solución de la ecuación dada. Decimos que tal valor satisface o verifica la ecuación.

Por ejemplo, 3 es solución de 3x + 2 = 4x – 1 ya que al sustituir por 2 en la ecuación obtenemos:

$$3.3 + 2 = 4.3 - 1$$

$$9 + 2 = 12 - 1$$

$$11 = 11$$

que es una igualdad numérica.

$$(-2)^2 - 3.(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$$

$$5^{\,2} - 3.5 - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$$

En cambio, $x^2 = -2$ no tiene una solución numérica.

Entonces, una ecuación puede: 1. tener una solución,

2. no tener solución,

3. tener varias soluciones.

Para poder hallar la solución o soluciones, intentamos aislar la incógnita ("despejar") en uno de los miembros. En estos casos utilizamos propiedades de la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de números reales.

***Ecuaciones de la forma*** → $a.x = b$

- ***x*** es la incógnita,
- ***a*** y ***b*** son números reales y $a \neq 0$
- ***a*** se llama coeficiente y $-$ ***b*** término independiente.

Se denominan de ***primer grado*** (o ecuaciones lineales) porque la incógnita sólo aparece elevada a la potencia 1.

***Ejemplo 1***

Resolver la ecuación $-2x + 5 = -3$

| | |
|---|---|
| $-2x + 5 - 5 = -3 - 5$ | Sumando miembro a miembro –5 |
| $-2x = -8$ | Realizando operaciones |
| $x = (-8) : (-2)$ | Dividiendo miembro a miembro por –2 |
| $x = 4$ | Realizando operaciones. |

Como vemos que se cumple la igualdad, podemos afirmar que x = 4 es solución de la ecuación dada. Escribimos el conjunto solución de esta manera: **S = {4}**

***Ejemplo 2.***

Resolver $3(x - 1) = -x + 1$

| | |
|---|---|
| $3(x - 1) = -x + 1$ | |
| $3x - 3 = -x + 1$ | Distribuimos miembro a miembro. |
| $3x - 3 + 3 = -x + 1 + 3$ | Sumamos miembro a miembro 3. |
| $3x = -x + 4$ | Resolvemos operaciones. |
| $3x + x = -x + 4 + x$ | Sumamos *x* miembro a miembro. |
| $4x = 4$ | Resolvemos operaciones. |
| $x = 4 : 4$ | Dividimos miembro a miembro por 4. |
| $x = 1$ | |

Para asegurarnos que x = 1 es solución de la ecuación $3(x - 1) = -x + 1$ reemplazamos:

$$3(1 - 1) = -1 + 1 \rightarrow 3.0 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Podemos afirmar que la solución es x = 1 pues al reemplazar en la ecuación dada se verifica la igualdad:

Escribimos el conjunto solución de esta manera:

$$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}\}$$

***Ejemplo 3***

Hallar el conjunto de soluciones de $\frac{x}{2} + \frac{1}{3}(x - \frac{x}{2}) = x - 1$

| | |
|---|---|
| $\frac{x}{2} + \frac{1}{3}(x - \frac{x}{2}) = x - 1$ | Se resuelve el paréntesis y se lo elimina. |
| $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{6} = x - 1$ | Se reduce a común denominador. |
| $\frac{3x + 2x - x}{6}$ | Resolviendo la suma. |
| $\frac{4x}{6}.6 = (x - 1).6$ | Multiplicando miembro a miembro a 6. |
| $4x = 6x - 6$ | Resolvieron las operaciones. |
| $4x - 6x = 6x - 6 - 6x$ | Sumando miembro a miembro 6x. |
| $-2x = -6$ | Resolviendo las operaciones. |
| $-2x : -2 = -6 : -2$ | Dividiendo por –2. |
| $x = 3$ | |

Debemos asegurarnos que x = 3 es solución. Reemplazamos en la ecuación dada.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}(3-\frac{3}{2}) = 3-1$$

$$\frac{3}{2}+1-\frac{1}{2} = 2$$

$$1+1=2$$

Luego es: **S = {3}**

**Ejemplo 4**.

Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ 4x - 1 = -2(1 - 2x)$

$b)\ 3x - 2 = 2(x - 1) + x$

*a*)

$4x - 1 = -2(1 - 2x)$

$4x - 1 = -2 + 4x$ Distribuyendo.

$4x - 1 - 4x = -2 + 4x - 4x$ Sumando el opuesto de 4x.

$-1 = -2$ Resolviendo las operaciones.

Al resolver las operaciones se llega a un absurdo. Así se concluye que la ecuación planteada **no tiene solución**.

Se dice que el conjunto solución es vacío y se escribe $\boldsymbol{S = \varnothing}$**.**

*b*)

$3x - 2 = 2(x - 1) + x$

$3x - 2 = 2x - 2 + x$ Distribuyendo.

$3x - 2 = 3x - 2$ Asociando y resolviendo.

$3x - 3x = -2 + 2$ Agrupando los términos en x en un miembro y los números en el otro.

$0 = 0$

En este caso, al resolver las operaciones se llega a una igualdad.

Esto significa que la ecuación planteada se verifica para cualquier número real. Esto es, tiene **infinitas soluciones**.

Por ejemplo x = 1 satisface la ecuación, pues al reemplazar en la ecuación dada es:

$$3.1 - 2 = 2\,(1 - 1) + 1 \rightarrow 1 = 0 + 1 = 1$$

Y también x = 0 satisface la ecuación, pues

$$3.0 - 2 = 2\,(0 - 1) + 0 \rightarrow -2 = 2.(-1) = -2$$

El conjunto solución es el de los números reales.

Lo expresamos: $\boldsymbol{S} = \mathfrak{R}$

***Inecuaciones***

Expresiones como: "peso máximo 225 kg", "velocidad mínima 40 km/h", "lo esperé más de 15 minutos" son habituales en la vida cotidiana.

Para traducir al lenguaje matemático cualquiera de estas relaciones se hace uso de desigualdades:

- peso (p) máximo 225 kg → $p \leq 225$
- velocidad (v) mínima 40 km/h → $v \geq 40$
- esperé (e) más de 15 minutos → $e > 15$

Las relaciones algebraicas que se expresan mediante desigualdades reciben el nombre de **inecuaciones**.

En la inecuación p ≤225, cualquier número que cumpla con las condiciones de la inecuación será solución de la misma.

• p = 200 es solución de p ≤225 pues 200 ≤225.

• p = 225 también es solución de p ≤225 pues 225 = 225.

• También son soluciones p = 100: p = 55, 5 p = 0.

• Pero no lo es p = 300 pues no cumple la relación de menor o igual y tampoco lo es p = -15 pues no tiene sentido un peso negativo (debe ser p ≥0).

• En este ejemplo, los números reales que verifican la desigualdad deben ser mayores o iguales que cero (pues el peso no puede tomar valores negativos) y menores o iguales que 225, que es la condición inicial de la relación.

Gráficamente, el conjunto solución es el segmento con extremos en 0 y 225. Todos los puntos del segmento satisfacen la desigualdad.


Los círculos rellenos en los extremos del segmento indican que 0 y 225 son solución de la ecuación, esto es pertenecen a su conjunto solución. Se puede expresar el conjunto de soluciones S como $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R} / \ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{225}\}$.

**Resolución de inecuaciones**

Las siguientes operaciones no cambian el sentido de la desigualdad:

• Sumar o restar un número a ambos miembros de la desigualdad.

• Multiplicar (o dividir) por un número mayor que cero.

Pero cambia el sentido de la desigualdad:

• Multiplicar (o dividir) por un número menor que cero.

$$3 > 1 \; pero \; 3\,(-2) < 1\,(-2) \; ya \; que - 6 < -2$$

***Ejemplo***

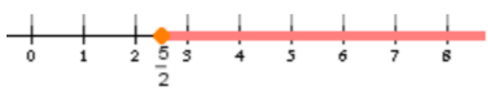
Resolver $3.(1-x) \leq -2 - x$

| | |
|---|---|
| $3.1 - 3x \leq -2 - x$ | Distribuyendo |
| $3 - 3x \leq -2 - x$ | Sumando x a ambos miembros |
| $3 - 3x + x \leq -2 - x + x$ | |
| $-3 + 3 - 2x \leq -2 - 3$ | Restando 3 a ambos miembros |
| $-2x \leq -5$ | |
| $(-1/2)\,(-2x) \geq (-1/2)(-5)$ | Multplicando ambos miembros por $-{}^{1}/_{2} < 0$ |
| $x \geq 5/2$ | |

Son solución de la inecuación todos los números reales mayores o iguales que 5/2:

$$S = \{x \in \mathfrak{R} / \ x \geq 5/2\}$$

Gráficamente:



***Ecuaciones no lineales***

Hasta ahora estuvimos viendo ecuaciones en las que la **incógnita** estaban elevadas a la potencia de 1. Es decir, de **grado 1**. Sin embargo nos va a interesar trabajar, también, con ecuaciones de **grado 2**. O sea, las incógnitas elevadas a la potencia de 2. Éstas toman el nombre de **ecuaciones cuadráticas.**

Por ejemplo: $x^2 = 4$

**Se conoce como ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación de la forma ax2 + bx + c = 0 (a≠0, y a, b y c números reales).**

Los números a, b y c son los coeficientes de la ecuación.

***Ejemplo***

$$3x^2 + 2x - 5 = 0, donde\ a = 3;\ b = 2\ y\ c = -5.$$

Otros ejemplos

1) $8x^2 = 32$

2) $-x^2 + x = 0$

3) $4x^2 - 16 = 0$

4) $(8x - 2)\,(2x + 3) = 0$

5) $(2x - 3)^2 = 16$

***Ejemplo***

$(x - 2)\,(x + 3) = 0$

Podemos observar que la expresión en el primer miembro es un producto entre números reales. Para que este producto sea igual a cero es suficiente que lo sea uno de factores.

En este caso $x - 2 = 0$ ó $x + 3 = 0.$

Entonces, **S = {2; -3}** el conjunto solución de la ecuación.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado se llaman **raíces** de la ecuación cuadrática.

***Ejemplo***

$-x^{2} + x = 0$

Sacando factor común "x" se tiene: $-x^2 + x = x(-x + 1) = 0$

Esta se puede resolver igual que la anterior.

**S = {0; 1}**

***Ejemplo***

$4x^2 - 16 = 0$

La expresión en el primer miembro es una diferencia de cuadrados. Podemos escribir:

$4x^2 - 16 = (2x + 4)(2x - 4) = 0$

Y nuevamente las raíces se encuentran al tener en cuenta que para que un producto entre dos factores sea cero es suficiente que lo sea uno de ellos. Así las soluciones son:

$$x = -2 \text{ ó } x = 2$$

También se puede resolver esta ecuación de la siguiente manera:

$4x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 4 = 0$ Dividiendo por 4 ambos miembros

$x^2 = 4$ Sumando miembro a miembro 4

$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{4}$

$|x| = 2$ Si a es un número real cualquiera $\sqrt[2]{a} = |a|$

$x = 2$ ó $x = -2$.

**S = { -2; 2}**

***Ejemplo***

$x^2 + 6x + 9 = 4$

El primer término de la igualdad es el desarrollo de $(x + 3)^2$

$(x + 3)^2 = (x + 3).(x + 3)$ Escribiendo el cuadrado como producto.

$= x.(x + 3) + 3(x + 3)$ Distribuyendo.

$= x^2 + 3x + 3x + 9$ Distribuyendo nuevamente.

$= x^2 + 6x + 9$ Asociando y sumando los términos semejantes.

De este modo podemos reemplazar a $x^2 + 6x + 9$ por la expresión $(x + 3)^2$ en la ecuación dada y escribir:

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

$$(x + 3)^2 = 4$$

$$\sqrt[2]{(x + 3)^2} = \sqrt[2]{4}$$

$$|x + 3| = 2$$

$$x + 3 = 2 \text{ ó } x + 3 = -2$$

de donde $x = -1$ ó $x = 5$

Si se reemplazan estos valores en la ecuación dada, se ve que son solución.

Para $x = -1$ $es$ $(-1)2 + (-1).6 + 9 = 1 - 6 + 9 = 4$

Para $x = -5$ $es$ $(-5)2 + (-5).6 + 9 = 25 - 30 + 9 = 4$

**S = {-5; -1}**

Esto se basa en la propiedad **binomio de cuadrado perfecto.**

$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

$(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$

Otras ecuaciones de segundo grado no pueden reducirse a ninguno de los casos anteriores.

***Ejemplo***

$2x^2 - 12x + 10 = 0$

Para resolverlas utilizamos la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$; $\boldsymbol{b}$ es el coeficiente del término lineal $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{c}$ es el término independiente y $\boldsymbol{x_{1,2}}$ son las posibles soluciones de la ecuación dada.

***Ejemplo***

Resolver la ecuación $2x^2 - 12\,x + 10 = 0$

Teniendo en cuenta que $a = 2$; $b = -12$ y $c = 10$ reemplazamos en la fórmula anterior:

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.2.10}}{2.2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{4} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{12 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{12+8}{4} = 5; x_1 = \frac{12-8}{4} = 1$$

$$\boldsymbol{S} = \{\,\mathbf{1};\ \mathbf{5}\}$$

***Ejemplo***

Resolver $\sqrt{x^3 - 2} = 5$

Como la raíz cuadrada está definida sólo cuando el radicando es mayor o igual que cero, lo primero que vemos es cuál es el dominio de definición de esta ecuación.

Buscamos para qué números reales es $x^2 - 2 \geq 0$ y encontramos que debe ser $x \geq \sqrt[3]{2}$ . Esto quiere decir que si encontramos algún resultado que no cumpla esta condición, el mismo no es solución de la ecuación dada.

Entonces,

$$\sqrt{x^3 - 2} = 5$$

$$(\sqrt{x^3 - 2}\,)^2 = 5^2$$

$$x^3 - 2 = 25$$

$$x^3 - 2 + 2 = 25 + 2$$

$$x^3 = 27$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27}$$

$$x = 3$$

Como x = 3 cumple la condición, entonces la solución de la ecuación es $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}\}$

***Ecuaciones con expresiones racionales***

Las ecuaciones racionales son aquellas expresadas como fracciones u operaciones entre fracciones en las que la incógnita está en el denominador.

Para resolverlas las transformamos en una expresión más sencilla, que será más fácil de resolver.

***Ejemplo***

$$\frac{x}{x+2}-\frac{4}{x+1}=\frac{-2}{x+2}$$

Al haber incógnitas en el denominador, hay que definir el dominio de la ecuación.

Vemos que $x + 1 = 0\; si\; x = -1\;, x + 2 = 0\; y\; si\; x = -2$.

Entonces, el dominio de la ecuación son todos los ℝ (números reales) sin tener en cuenta el -1 ni el -2.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{4}{x+1}-\frac{-2}{x+2}=0$$

Buscamos común denominador/divisor para poder operar:

$$\frac{x(x+1)-4(x+2)+2(x+2)}{(x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{x^2+x+4x-8+2x+2}{(x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{x^2-x-6}{(x+1)(x+2)}=0$$

$$x^2-x-6=0$$

Multiplicamos ambos miembros por (x+2)(x+1) (esto podemos hacerlo porque estamos trabajando para x ≠ -2 y x ≠-1)

Utilizando la fórmula resolvente $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(1)^2-4.1.(-6)}}{2}=\frac{1\pm5}{2}\Longrightarrow x_1=3; x_2=-2$$

Llegados aquí, podemos tentarnos y decir que estas son las soluciones de la ecuación dada. Pero si lo hacemos cometeríamos un error ya que $x = -2$ no pertenece al dominio de definición de la función.

Entonces la única solución es $x = 3$.

$$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}\}$$

***Inecuaciones***

Al igual que con las ecuaciones, ampliamos ahora nuestro estudio a ecuaciones no lineales con una incógnita.

En su resolución, usamos propiedades de los números reales, incorporamos el uso de los intervalos y de valor absoluto.

***Ejemplo***

$(x - 1)(x + 3) > 0$

En el primer miembro de la desigualdad tenemos un producto de números reales.

Para que el producto sea mayor que cero deben ser ambos factores positivos o ambos negativos. Planteamos:

$x - 1 > 0 \wedge x + 3 > 0 \quad \vee \quad x - 1 < 0 \wedge x + 3 < 0$

$x > 1 \wedge x > -3 \quad \vee \quad x < 1 \wedge x < -3$

Los números que buscamos tienen que cumplir al mismo tiempo ser mayores que -3 y mayores que 1. Esto ocurre si es $x > 1$

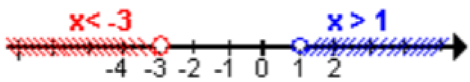
$$S_1 = (1; +\infty)$$

Los números que buscamos tienen que cumplir al mismo tiempo ser menores que -3 y menores que 1. Esto ocurre si es $x < -3$

$$S_2 = (-\infty; -3)$$

Hallamos el conjunto solución como unión de intervalos

$$S = (1; +\infty) \cup (-\infty; -3)$$



***Ejemplo***

$4x^2 < 25$

$4x^2 - 25 < 0$

Como $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$, reemplazamos

$$(2x + 5)(2x - 5) < 0$$

Para que el producto sea menor que cero debe ser uno de los factores mayor que cero y el otro menor que cero. Planteamos:

$2x + 5 > 0 \wedge 2x - 5 < 0 \quad \vee \quad 2x + 5 < 0 \wedge 2x - 5 > 0$

$2x > -5 \wedge 2x < 5 \quad \vee \quad 2x < -5 \wedge 2x > 5$

$x > \frac{-5}{2} \wedge x < \frac{5}{2} \quad \vee \quad x < \frac{-5}{2} \wedge x > \frac{5}{2}$

$S_1 = \left(\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right) \quad \vee \quad S_2 = \varnothing$

Hallamos el conjunto solución como unión de intervalos

$$S = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right) \cup \varnothing$$

$$S = \left(\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

***Ejemplo***

Sea $A = \{x \in \Re / x(x^2 - 1) \geq 0\}$

$x \geq 0 \wedge x^2 - 1 \geq 0 \quad \vee \quad x \leq 0 \wedge x^2 - 1 \leq 0$

Resolviendo

$x \geq 0 \wedge x^2 \geq 1 \quad \vee \quad x \leq 0 \wedge x^2 \leq 1$

$x \geq 0 \wedge \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1} \quad \vee \quad x \leq 0 \wedge \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1}$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2} = |x|$, escribimos

$x \geq 0 \wedge |x| \geq 1 \qquad \vee \qquad x \leq 0 \wedge |x| \leq 1$

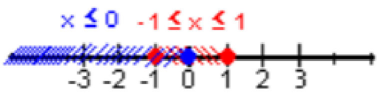
En ambos miembros tenemos una expresión con módulo. Usando propiedades es:

1. $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1$
2. $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Reemplazamos

$x \geq 0 \wedge (x \geq 1 \vee x \leq -1) \qquad \vee \qquad x \leq 0 \wedge (-1 \leq x \leq 1)$

Gráficamente


Los puntos de la recta doblemente rayados son, en cada caso, la solución Escribimos:

$S_1 = [1; +\infty) \qquad S_2 = [-1; 0]$

$$S = [1; +\infty) \cup [-1; 0]$$

## *Valor Absoluto*

Si a es un número real el valor absoluto o módulo de a se denota |a| y se define:

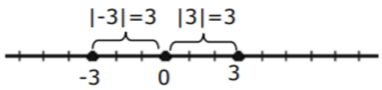
$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

*Si a es un número real; |a| ≥ 0(el módulo de un número real es siempre mayor ó igual a cero)*

### *Ejemplo*

1. |2| = 2 (porque 2 ≥0)
2. |-2| = -(-2) = 2 (porque –2 < 0)
3. |0| = 0 (porque 0 ≥ 0)

Si representamos los números reales mediante puntos en una recta, el valor absoluto de **a** se interpreta como la distancia que hay entre **a** y el origen **0**.




Por ejemplo:

|a| = 3 se interpreta como los números cuya distancia al origen es igual a 3.

### *Propiedades*

1. El valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los factores:
$$|a \cdot b| = |a| \, . \, |b|$$

2. . Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto:
$$|a| = |-a|$$

3. . $|a| = 0 \text{ sí y sólo sí } a = 0$

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$

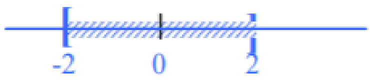
5. $Si\ b > 0\text{: } |a| \leq b \text{ sí y sólo sí } -b \leq a \leq b,$

6. $Si\ b > 0\text{: } |a| \geq b \text{ sí y sólo sí } a \geq b \text{ ó } a \leq -b$

***Ejemplo***

Hallar los números reales que verifican $|x| \leq 2$.

Los números que buscamos están a distancia menor o igual que 2 con respecto al cero, ya que |x| mide la distancia de x al cero. Representado en la recta numérica obtenemos:




Los números buscados cumplen la condición $-2 \leq x \leq 2$.

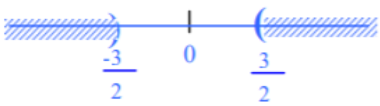
Los números reales que pertenecen al intervalo [-2; 2] verifican $|x| \leq 2$.

$$S = [-2; 2]$$

***Ejemplo***

Hallar los números reales que verifican $|x| > \frac{3}{2}$

Los números que buscamos están a distancia mayor que $\frac{3}{2}$ con respecto al cero.




Luego los números reales x cumplen: $x < -\frac{3}{2}$ ó $x > \frac{3}{2}$

Entonces:

$$|x| > \frac{3}{2} \ sí \ y \ solo \ sí \ \ x < -\frac{3}{2} \text{ ó } x > \frac{3}{2}$$

los números reales que verifican $|x| > \frac{3}{2}$ pertenecen a $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

$$S = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

***Distancia entre dos números reales***

Dados dos números reales cualesquiera **a** y **b**, **la distancia entre a y b**, que escribimos $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$ es el número real **|a - b|**.

**Si a y b número reales, entonces d(a; b) = |a – b|**

***Ejemplo***

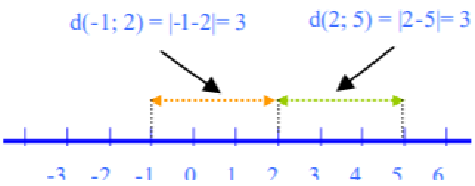
¿Para qué valores de x se cumple que |x - 2| = 3?

La expresión |x - 2| = 3 significa "los números cuya distancia a 2 es igual a 3"

Interpretemos sobre la recta real esta condición

Al desplazarnos 3 unidades hacia la derecha de 2 encontramos que x = 5 está a distancia 3 de 2.

Y si nos desplazamos 3 unidades hacia la izquierda de 2, encontramos que x = -1 está a distancia 3 de 2.




Luego podemos conjeturar que x = -1 y x = 5 son los números que están a distancia 3 de 2.

Probémoslo:

Queremos hallar los números reales que verifican $|x - 2| = 3$.

La expresión $x - 2$ puede ser mayor que cero o menor que cero. Esto depende de que x sea mayor o menor que 2. Entonces, puede ocurrir:

$$x - 2 > 0 \text{ ó } x - 2 < 0$$

O lo que es lo mismo $x > 2$ ó $x < 2$.

1. Si $x > 2 es |x - 2| = x - 2$ (por definición de valor absoluto)

   Así resulta:

$$|x - 2| = 3 \Rightarrow x - 2 = 3\ de\ donde\ x = 5$$

2. $Si\ x < 2\ es\ |x-2| = -(x-2)$ (por definición de valor absoluto)

$|x-2| = -x + 2$

$|x-2| = 3 \Rightarrow -x + 2 = 3\ de\ donde\ x = -1$

$$S = \{-1;\ 5\}$$

***Ejemplo***

Resolver $|x + 5| < 10$ y representar el conjunto solución

Usamos la propiedad: $b > 0$; $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

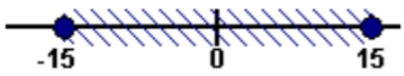
$-10 < x + 5 < 10$ Por la propiedad enunciada

$-10 - 5 < x < 10 - 5$ Restamos miembro a miembro 5

$-15 < x < 5$

$x \in (-15;\ 5)$

$$\boldsymbol{S = (-15;\ 5)}$$



***Coordenadas cartesianas***

Para localizar un punto en el plano necesitamos un sistema de referencia.

Tenemos sistema formado por dos rectas perpendiculares, a las que suponemos dadas en un cierto orden a las que llamamos **ejes coordenados**.

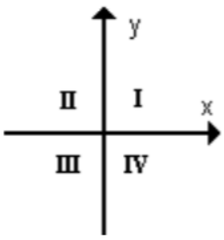
La primera es horizontal y la segunda es vertical. Llamemos **origen de coordenadas** al punto de intersección de ambas. Lo simbolizamos con **O**.


Sobre cada uno de los ejes asignamos un número real (tal como lo hicimos al estudiar la recta real).

1. Al eje vertical lo llamamos **eje de ordenadas** $(y)$
2. Al eje horizontal lo llamamos **eje de abscisas** $(x)$

Este sistema de ejes se denomina **sistema de ejes cartesianos** o **sistema cartesiano**.

Los ejes cartesianos dividen el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes** que se enumeran en sentido contrario al recorrido de las agujas del reloj.

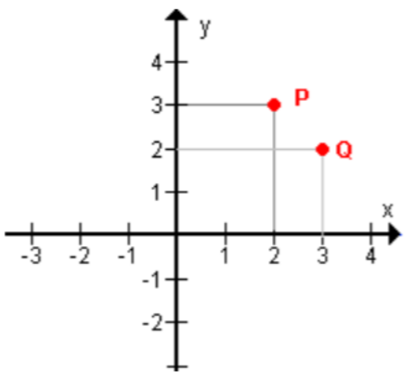



Para obtener la posición de un punto en el plano, es suficiente con proyectarlo sobre los ejes.

La intersección de estos segmentos con los ejes nos da las coordenadas del punto.

Así al proyectar el punto P obtenemos los puntos correspondientes a los números: 2 en el eje de abscisas y 3 en el eje de ordenadas.

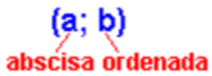
El punto P queda identificado por los puntos 2 y 3 (en ese orden), mientras que el punto Q se identifica por los puntos 3 y 2 (en ese orden).



Para indicar el par ordenado que da la posición del punto P lo hacemos así: **(2; 3)**. Y análogamente, el par que da la posición de Q lo indicamos **(3; 2)**.

Observamos que el orden en que se dan los números es importante. A esto lo llamamos **par ordenado** a estos pares de números.

A la primera componente del par ordenado se la llama abscisa. A la segunda componente, ordenada.

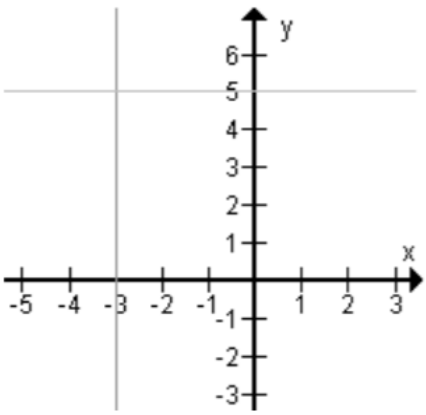


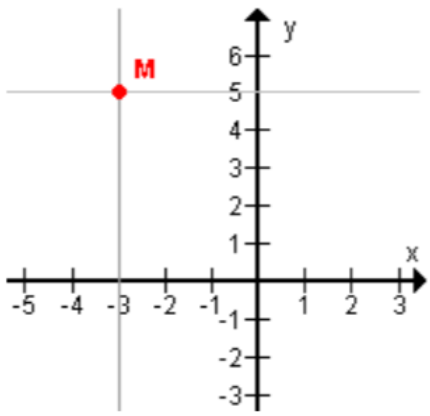

De este modo a cada punto del plano, le hacemos corresponder un par ordenado de números reales.

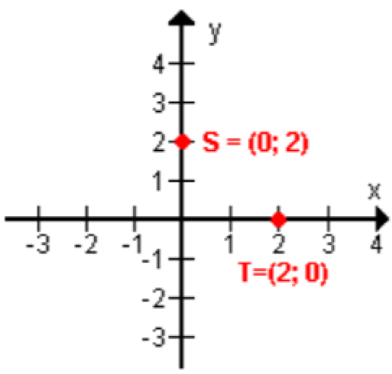
$$\Re^2 = \{(x;\ y)\ /x \in \Re;\ y \in \Re\}$$

***Ejemplo***

En el caso del punto M = (-3; 5), trazamos las recta perpendicular al eje de abscisas por – 3 y la perpendicular al eje de ordenadas por 5. La intersección de estas rectas nos da la posición del punto M.



***Ejemplo***

Representar en el plano todos los puntos que tienen:

a) Ordenada igual a -2

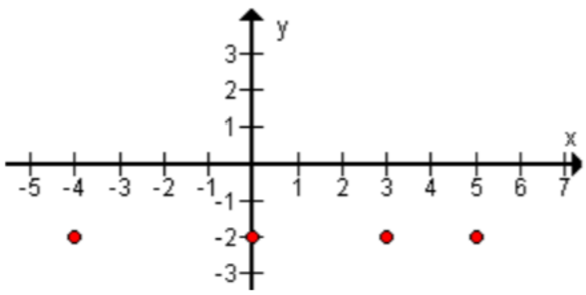
b) Abscisa igual a 1

c) Abscisa y ordenada iguales.

a) Este primer ítem nos pide representar en el plano todos los puntos cuya ordenada es igual a -2.

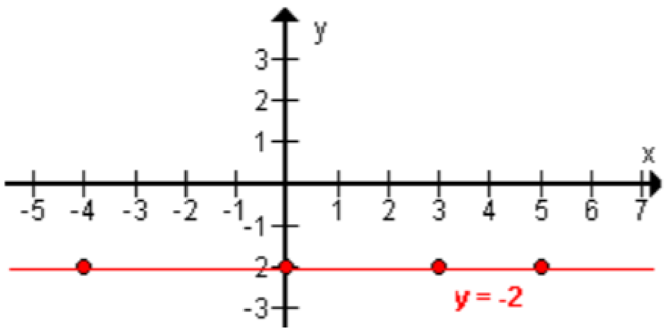
Algunos puntos que cumplen esta condición son, por ejemplo, (5; -2), (3; -2), (0; -2), (-4; -2).

Si nos preguntan cuántos hay que cumplan esta condición, diremos que hay infinitos. Son todos los puntos cuyas coordenadas tienen la forma **(a; -2)**. Siendo **a** un número real.




Pero dijimos que hay infinitos puntos que cumplen la condición de tener su ordenada igual $a\ -2$. En realidad, son todos los puntos que pertenecen a la recta horizontal:

$$y = -2$$




***IMPORTANTE: Una recta horizontal tiene por ecuación la expresión $y = a$ donde a es un número real.***

b) Ahora debemos dibujar todos los puntos cuya abscisa es igual a 1. Algunos puntos que cumplen esta condición son, por ejemplo, (1; -2), (1; 2), (1; 0), (1; 4).

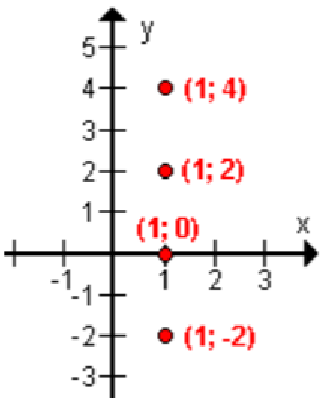
Si nos preguntan cuántos hay que cumplan esta condición, diremos que hay infinitos.

Son todos los puntos cuyas coordenadas tienen la forma:

$$(1; b)$$

siendo b un número real.

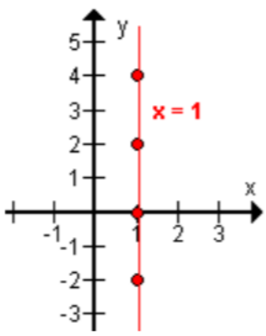
Los puntos que nombramos quedan ubicados como en la figura.




Pero, sólo dibujamos algunos. Podríamos dibujar infinitos puntos que cumplen esta condición.

Son todos los puntos pertenecen a la recta vertical.

$$x = 1$$



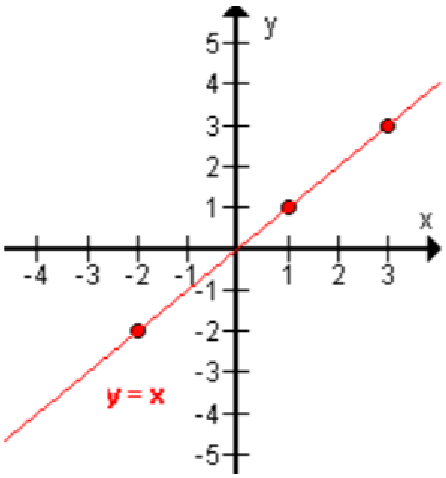

**IMPORTANTE:** ***Una recta vertical tiene por ecuación la expresión x = b donde b es un número real.***

c) Finalmente, representamos los puntos que tienen iguales su abscisa y su ordenada. Ejemplos de ellos son: (-2; -2), (1; 1); (3; 3).

Igual que antes, existen infinitos puntos que cumplen con esta condición, son todos los puntos que pertenecen a la recta de ecuación:

$$y = x$$

Esta recta es la bisectriz del primero y tercer cuadrante.




***La recta de ecuación y = x representa la bisectriz del primer y tercer cuadrante.***

***Ejemplo***

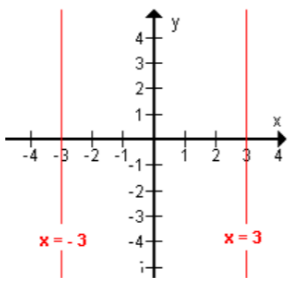
Representar en el plano real el conjunto $B = \{(x;\ y) \in \Re^2 \ /\ |x| = 3\}$

Analizamos la forma de los elementos de B. De la definición del conjunto surge que la abscisa de cada par ordenado, debe cumplir la condición:

$$|x| = 3$$

Por definición de módulo, quedaría:

$$x = 3 \text{ ó } x = -3$$

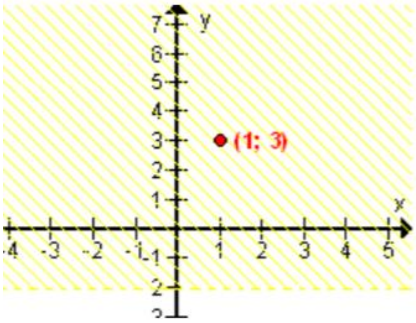


***Ejemplo***

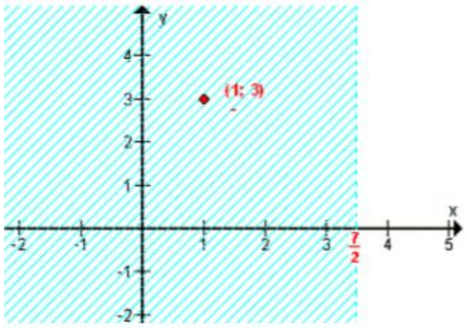
Representar en el plano todos los puntos que tienen ordenada mayor que -2 y abscisa menor que $\frac{7}{2}$

Representemos primero la región de los puntos que tienen su ordenada mayor que $-2$ $(y > -2)$. Esta es la recta de ecuación $y = -2$.

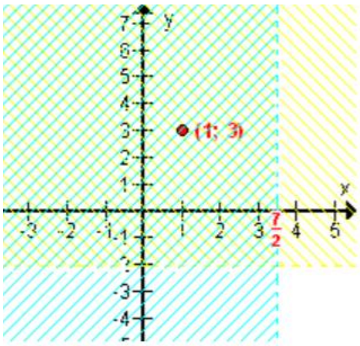
Como sus puntos tienen la ordenada igual a -2, la dibujamos punteada.




Hacemos lo mismo para la segunda condición: la abscisa del punto debe ser menor que $\frac{7}{2}$ y la graficamos.




Las dibujamos sobre el mismo plano para ver que puntos pertenecen simultáneamente a ambas regiones (deben ser los que nos interesan) y obtenemos



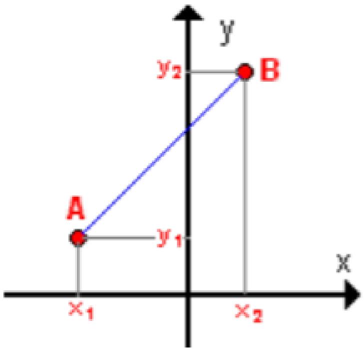
***Distancia entre dos puntos***

Consideremos los puntos del plano:

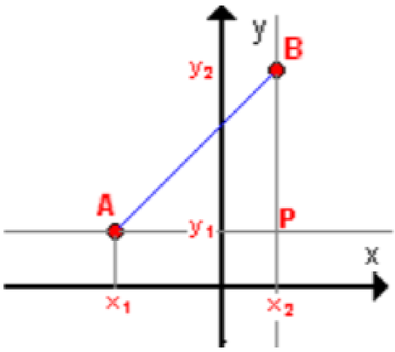
$$A = (x_1;\ y_1)\ y\ B = (x_2;\ y_2)$$

Queremos determinar la distancia entre A y B valiéndonos de sus coordenadas.

Si unimos estos puntos con un segmento, la distancia entre A y B es la medida de la longitud del segmento AB




Si dibujamos rectas paralelas a los ejes que pasen por los puntos y llamamos P a su intersección, queda determinado el triángulo rectángulo APB, cuya hipotenusa es el segmento AB.




Además $P = (x_2;\ y_1)$.

Llamemos:

1. |AB| a la longitud de la hipotenusa AB
2. |PB| a la longitud del cateto PB
3. |AP| a la longitud del cateto AP

Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

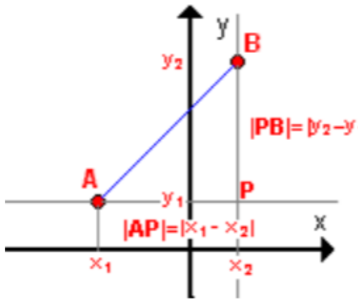
$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$$

Ahora bien,

$|PB| = |y_1 - y_2|$ (el valor absoluto de la diferencia entre las ordenadas de P y B).

Y,

$|AP| = |x_1 - x_2|$ (el valor absoluto de la diferencia entre las abscisas de A y P).




Reemplazando en

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$$

Nos queda:

$$|AB|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$ Recordar que $|a|^2 = a^2$

Si extraemos la raíz cuadrada positiva y llamamos d(A; B) a la distancia entre A y B, es:

$$d(A\,;\,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

**Recordar que la distancia entre dos puntos del plano es siempre un número mayor o igual que cero.**

***Ejemplo***

Calcular la distancia entre A = (-3; 4) y B = (6; 4)

Usando

$$d(A;B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Nos queda

$$d(A;B) = \sqrt{(-3-6)^2 + (4-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{81} = 9$$

Por lo que $d(A;\ B) = 9$

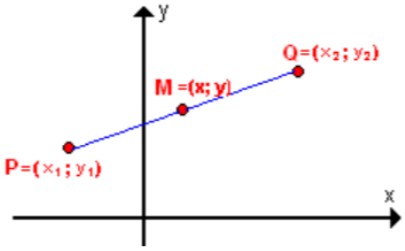
***Coordenadas del punto medio de un segmento***

Consideremos el segmento PQ siendo

$$P = (x_1;\ y_1)\ y\ Q = (x_2;\ y_2)$$

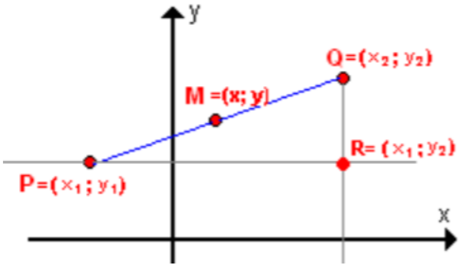
Y sea $M = (x;\ y)$ el punto medio del segmento PQ.

Queremos determinar las coordenadas de M en función de las coordenadas de P y de Q.

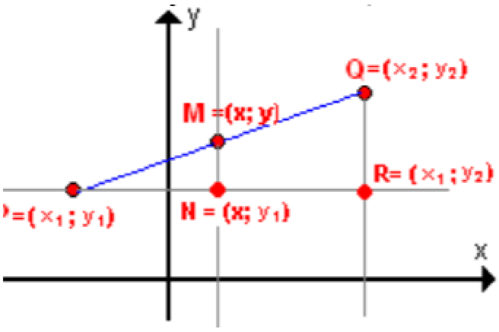



Trazamos las rectas paralelas a los ejes que pasan por P y Q. Queda determinado el triángulo rectángulo PRQ rectángulo en R y es

$$R = (x_1; y_2)$$



Por M, trazamos una recta paralela a QR. Esta recta interseca al lado PR en N.




Luego es: $|PN| = |NR|$

En consecuencia

$x - x_1 = x_2 - x$ (Ya que $N = (x; y_1)$ y $M = (x; y)$)

O en forma equivalente $2x = x_1 + x_2$

Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por lo cual la abscisa del punto medio de un segmento es el promedio de las abscisas de sus extremos.

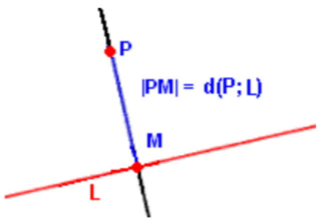
Procediendo de manera similar, se encuentra que la ordenada del punto medio es el promedio de las ordenadas de sus extremos.

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

***Distancia de un punto a una recta***

Llamamos *distancia de un punto P a una recta L* a la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado desde el punto.

$$d(P; L)$$



La distancia d(P; L) la hallamos calculando la distancia entre P y M, por lo que resulta que:

$$d(P; L) = d(P; M)$$

siendo M el punto de intersección de la recta L y el segmento PM perpendicular a la recta.

***Ejemplo***

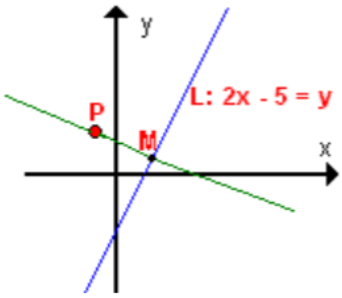
Calculamos la distancia del punto $P = (-2;\ 4)$ a la recta de ecuación $L$: $2x - 5 = y$

Consideremos una recta perpendicular a la dada que pasa por P y sea M la intersección de las dos rectas.

Para poder hallar las coordenadas de M debemos halar la ecuación de la recta perpendicular a L. que pasa por P y M.

Tenemos:

$$P = (-2;\ 4)\ y\ L: 2x - 5 = y$$




La pendiente de L es $m = 2$ por lo que la pendiente de la recta perpendicular es

$m_2 = -\frac{1}{2}$

*Dos rectas $L_1$ y $L_2$ con pendientes $m_1$ y $m_2$ ($m_1 \neq 0$) respectivamente son perpendiculares si y solo si $m_1 . m_2 = -1$ o bien $m_2 = -\frac{1}{2}$*

La recta perpendicular a L tiene pendiente $-\frac{1}{2}$, pasa por $P = (-2;\ 4)$ y tiene la forma

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Para hallar b reemplazamos las coordenadas de P en la ecuación:

$$4 = -\frac{1}{2}.(-2) + b$$

De donde es $b = 4 - 1 = 3$

Entonces la recta perpendicular a L es:

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Hallamos la intersección entre ambas rectas. A este punto lo llamamos M Debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Igualamos las dos ecuaciones

$2x - 5 = -\frac{1}{2}x + 3$

$2x + \frac{1}{2}x = 3 + 5$ Sumando miembro a miembro $-\frac{1}{2}x$ y 5

$\frac{5}{2}x = 8$

$x = 8 : \frac{5}{2}$ Dividiendo por $\frac{5}{2}$ ambos miembros

$x = \frac{16}{5}$

Entonces, la abscisa de M es $x = \frac{16}{5}$

Buscamos su ordenada reemplazando en la recta $y = 2x - 5$ por $x = \frac{16}{5}$

$y = 2.\frac{16}{5} - 5 \Rightarrow y = \frac{7}{5}$

Entonces, la ordenada de M es $y = \frac{7}{5}$

Por lo que $M = \left(\frac{16}{5}; \frac{7}{5}\right)$

Finalmente, calculamos la distancia entre $P = (-2;\ 4)$ y $M = \left(\frac{16}{5}; \frac{7}{5}\right)$

Para eso usamos la fórmula de distancia:

$$d(P;M) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-2 - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{676}{25} + \frac{169}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{845}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{845}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5.169}}{5}$$

$$= \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

Por lo que es $d(P;\ M) = \frac{13\sqrt{5}}{5}$o bien, la distancia entre $P = (-2;\ 4)$ y la recta $L$: $2x – 5 = y$ es $\frac{13\sqrt{5}}{5}$.