ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

ÁLGEBRA VECTORIAL: EJERCICIOS TIPO PARCIAL Y/O FINAL

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)

EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sean $A = (2,-2,1)$, $L: X = \lambda(0,2,1) + (-1,1,0)$ y Π el plano que pasa por los puntos $(1,2,0)$, $(1,3,1)$ y $(2,3,0)$. Hallar $B \in L$ tal que la recta que pasa por A y B no corte al plano Π.

Determinación del plano Π:

Como dan tres puntos del plano, se puede calcular su vector normal:

$$[P_1 - P_2] \times [P_1 - P_3] = \overrightarrow{N_\pi}$$

$$P_1 - P_2 = (1,2,0) - (1,3,1) = (0,-1,-1)$$

$$P_1 - P_3 = (1,2,0) - (2,3,0) = (-1,-1,0)$$

$$\overrightarrow{N_\pi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{N_\pi} = i(0 - 1) - j(0 - 1) + k(0 - 1) = -i + j - k = (-1,1,-1)$$

La ecuación del plano Π sería $-x + y - z + D = 0$

Tomando el punto $(1,2,0) \rightarrow -1 + 2 - 0 + D = 0 \rightarrow 1 + D = 0 \rightarrow D = -1 \rightarrow$

$$\Pi: -x + y - z - 1 = 0$$

1° Parcial
Cátedra Única

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sean A = (2,-2,1), L: X = λ(0,2,1) + (-1,1,0) y Π el plano que pasa por los puntos (1,2,0), (1,3,1) y (2,3,0). Hallar B ∈ L tal que la recta que pasa por A y B no corte al plano Π.

Π: -x + y - z - 1 = 0

Para encontrar el punto B ∈ L tal que la recta que pasa por A y B no corte al plano Π (que es lo mismo que sea paralela al plano Π), debe estar a la misma distancia de Π que el punto A.

Cálculo de la distancia (A,Π):

$$d(A,\pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rightarrow d(A,\pi) = \frac{|-2-2-1-1|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2}} \rightarrow$$

$$d(A,\pi) = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow d(A,\pi) = \frac{6\sqrt{3}}{3} \rightarrow d(A,\pi) = 2\sqrt{3}$$

1° Parcial
Cátedra Única

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sean A = (2,-2,1), L: X = λ(0,2,1) + (-1,1,0) y Π el plano que pasa por los puntos (1,2,0), (1,3,1) y (2,3,0). Hallar B ∈ L tal que la recta que pasa por A y B no corte al plano Π.

Π: -x + y - z - 1 = 0

$$d(A,\pi) = 2\sqrt{3}$$

Cálculo de la distancia (B,Π):

Como el punto B pertenece a la recta L, entonces B = (-1,2λ + 1,λ)

$$d(B,\pi) = \frac{|1 + 2\lambda + 1 - \lambda - 1|}{\sqrt{3}} \rightarrow d(B,\pi) = \frac{|\lambda + 1|}{\sqrt{3}}$$

Como d(B,Π) = d(A,Π):

$$\frac{|\lambda + 1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \rightarrow |\lambda + 1| = 6 \rightarrow \lambda_1 = 5; \lambda_2 = -7$$

1° Parcial
Cátedra Única

Sean $A = (2,-2,1)$, $L: X = \lambda(0,2,1) + (-1,1,0)$ y Π el plano que pasa por los puntos $(1,2,0)$, $(1,3,1)$ y $(2,3,0)$. Hallar $B \in L$ tal que la recta que pasa por A y B no corte al plano Π.

$$\Pi: -x + y - z - 1 = 0$$

$$B = (-1, 2\lambda + 1, \lambda)$$
$$\lambda_1 = 5; \lambda_2 = -7$$

Entonces:

$$B = (-1,11,5) \text{ o } B = (-1,-13,-7)$$

Vectores directores de la recta que pasa por A y B:

$$(-1,11,5) - (2,-2,1) = (-3,13,4)$$

$$(-1,-13,-7) - (2,-2,1) = (-3,-11,-8)$$

Como esta recta es paralela a Π, debe cumplirse que el producto interno de estos vectores por el vector normal del plano sea igual a 0:

$$(-3,13,4)\cdot(-1,1,-1) = 3 + 13 - 4 \neq 0$$

$$(-3,-11,-8)\cdot(-1,1,-1) = 3 - 11 + 8 = 0$$

El punto $B \in L$ tal que la recta que pasa por A y B no corte al plano Π es $(-1,-13,-7)$.

1° Parcial
Cátedra Única

Dados el plano Π: 2x - 2y + z = 4 y la recta L:λ(0,-1,1) + (1,-1,3), una recta L' paralela al plano y = 0 tal que L ∩ L' ≠ ∅ y d(P,Π) = 2 para todo P ∈ L' es (seleccione una): a)λ(1,0,-2) + (1,0,2); b)λ(1,0,-2) + (1,2,0); c)λ(0,1,0) + (1,-2,4); d)λ(-2,0,1) + (1,2,0).

El vector normal del plano Π es $\vec{N}$ = (2,-2,1).

La recta L' es paralela al plano y = 0 y como todos sus puntos deben estar a la misma distancia del plano Π, entonces L' debe ser paralela al plano Π. Esto significa que el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano Π y al vector normal del plano y = 0, que es (0,1,0).

Cálculo del vector director de L':

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = i(1) - j(0) + k(-2)$$

$$v_{L'} = (1,0,-2)$$

Para determinar un punto de la recta L', hay que considerar que la intersección entre L y L' no debe ser vacía. Por lo tanto, ese punto de intersección cumple con la ecuación de L:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = - \quad - 1 \\ z = \quad + 3 \end{cases}$$

Final
Cátedra Única

Dados el plano Π: 2x - 2y + z = 4 y la recta L:λ(0,-1,1) + (1,-1,3), una recta L' paralela al plano y = 0 tal que L ∩ L' ≠ ∅ y d(P,Π) = 2 para todo P ∈ L' es (seleccione una): a)λ(1,0,-2) + (1,0,2); b)λ(1,0,-2) + (1,2,0); c)λ(0,1,0) + (1,-2,4); d)λ(-2,0,1) + (1,2,0).

$$\vec{N} = (2,-2,1)$$

$$v_{L'} = (1,0,-2)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = - \quad - 1 \\ z = \quad + 3 \end{cases}$$

Como este punto debe estar a una distancia igual a 2 del plano Π:

$$d(P,\Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$2 = \frac{|2(1) - 2(-\lambda - 1) + \lambda + 3 - 4|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

$$6 = |2 + 2\lambda + 2 + \lambda + 3 - 4|$$

$$6 = |3 + 3\lambda|$$

$$6 = 3 + 3\lambda \rightarrow 3 = 3\lambda \rightarrow \lambda = 1$$

$$-6 = 3 + 3\lambda \rightarrow -9 = 3\lambda \rightarrow \lambda = -3$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Final
Cátedra Única

Dados el plano Π: $2x - 2y + z = 4$ y la recta $L:\lambda(0,-1,1) + (1,-1,3)$, una recta L' paralela al plano $y = 0$ tal que $L \cap L' \neq \emptyset$ y $d(P,\Pi) = 2$ para todo $P \in L'$ es (seleccione una): a) $\lambda(1,0,-2) + (1,0,2)$; b) $\lambda(1,0,-2) + (1,2,0)$; c) $\lambda(0,1,0) + (1,-2,4)$; d) $\lambda(-2,0,1) + (1,2,0)$.

$$v_{L'} = (1,0,-2)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = - \quad - 1 \\ z = \quad + 3 \end{cases}$$

$$\lambda = 1 \text{ y } \lambda = -3$$

Los puntos serían (1,-2,4) y (1,2,0).

El primer punto no se considera porque la recta que une a ese punto con el plano $y = 0$ no sería perpendicular.

Entonces, la ecuación de la recta L' es:

$$L':\lambda(1,0,-2) + (1,2,0)$$

Opción b

Final
Cátedra Única

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN