ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

$$(x^2 - 3x + 5) + \cdots$$
$$\cdots (2x^2 - 7x - 4)$$

POLINOMIOS: EJERCICIOS TIPO PARCIAL Y FINAL

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)

EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA ACADEMIA DIGITAL

Factorizar el polinomio $P(x) = x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 58x^2 + 105x - 90$ como producto de irreducibles en R[x] y en C[x], sabiendo que $p(3) = p'(3) = 0$.

3 es raíz de P(x) y es de multiplicidad 2, ya que $p'(3) = 0$.

Aplicando Ruffini:

	1	-8	26	-58	105	-90
3		3	-15	33	-75	90
	1	-5	11	-25	30	0
3		3	-6	15	-30	
	1	-2	5	-10	0	

$P(x) = (x - 3)^2(x^3 - 2x^2 + 5x - 10)$

Aplicando Gauss con $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$:

Divisores de 10: ±1,±2,±5,±10

Divisores de 1: ±1

Posibles raíces: ±1,±2,±5,±10

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 2(1)^2 + 5(1) - 10 = -6 \neq 0$ (No es raíz)

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 - 2(-1)^2 + 5(-1) - 10 = -18 \neq 0$ (No es raíz)

$x = 2 \rightarrow 2^3 - 2(2)^2 + 5(2) - 10 = 0$ (Es raíz)

$x = -2 \rightarrow (-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) - 10 = -36 \neq 0$ (No es raíz)

$x = 5 \rightarrow 5^3 - 2(5)^2 + 5(5) - 10 = 90 \neq 0$ (No es raíz)

$x = -5 \rightarrow (-5)^3 - 2(-5)^2 + 5(-5) - 10 = -210 \neq 0$ (No es raíz)

$x = 10 \rightarrow 10^3 - 2(10)^2 + 5(10) - 10 = 840 \neq 0$ (No es raíz)

$x = -10 \rightarrow (-10)^3 - 2(-10)^2 + 5(-10) - 10 = -1260 \neq 0$ (No es raíz)

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = S(x)(x - 2)$$

$$S(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x - 10):(x - 2)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Factorizar el polinomio $P(x) = x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 58x^2 + 105x - 90$ como producto de irreducibles en R[x] y en C[x], sabiendo que $p(3) = p'(3) = 0$.

$S(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x - 10):(x - 2)$

Aplicando Ruffini:

	1	-2	5	-10
2		2	0	10
	1	0	5	0

$S(x) = x^2 + 5$

$$x^2 + 5 = 0$$
$$x^2 = -5$$
$$x = \pm\sqrt{-5}$$
$$x = \pm\sqrt{5}i$$

La factorización quedaría:

En R[x]:

$$P(x) = (x - 3)^2(x - 2)(x^2 + 5)$$

En C[x]:

$$P(x) = (x - 3)^2(x - 2)(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)$$

Hallar el polinomio P con coeficientes reales de grado mínimo que verifica: P tiene dos raíces comunes con $x^3 + 27$, $z = 1 + 2i$ es raíz doble de P y $P(1) = 56$.

P con coeficientes reales de grado mínimo.
P tiene dos raíces comunes con $x^3 + 27$; $z = 1 + 2i$ es raíz doble de P; $P(1) = 56$.

$$x^3 + 27 = 0 \rightarrow x^3 = -27 \rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-27} \rightarrow x = \sqrt[3]{-27} \rightarrow x = -3$$

-3 es raíz de $x^3 + 27$

Aplicando Ruffini:

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	0

$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

Aplicando resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} \rightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{27}i}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Estas dos son las raíces comunes con P

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Hallar el polinomio P con coeficientes reales de grado mínimo que verifica: P tiene dos raíces comunes con $x^3 + 27$, $z = 1 + 2i$ es raíz doble de P y $P(1) = 56$.

P con coeficientes reales de grado mínimo.
P tiene dos raíces comunes con $x^3 + 27$; $z = 1 + 2i$ es raíz doble de P; $P(1) = 56$.

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$z = 1 + 2i$ es raíz doble:

$$x_3 = 1 + 2i; x_4 = 1 + 2i; x_5 = 1 - 2i; x_6 = 1 - 2i$$

Como P es de grado mínimo se deben considera el valor a de su coeficiente principal:

$$P(x) = a\left(x - \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)\right)(x - (1 + 2i))(x - (1 + 2i))\,(x - (1 - 2i))(x - (1 - 2i))$$

Las dos primeras raíces salieron de $(x^2 - 3x + 9)$

$$P(x) = a\,(x^2 - 3x + 9)\,(x - (1 + 2i))(x - (1 + 2i))\,(x - (1 - 2i))(x - (1 - 2i))$$

Como $P(1) = 56$:

$$P(1) = a\,(1^2 - 3(1) + 9)\,(1 - (1 + 2i))(1 - (1 + 2i))\,(1 - (1 - 2i))(1 - (1 - 2i))$$

$$\big(1 - (1 + 2i)\big)\big(1 - (1 + 2i)\big) = (1 - 1 - 2i)(1 - 1 - 2i) = (-2i)(-2i) = 4i^2 = -4$$

$$\big(1 - (1 - 2i)\big)\big(1 - (1 - 2i)\big) = (2i)(2i) = 4i^2 = -4$$

$$P(1) = a\,(7)(-4)(-4) = 112a \rightarrow 112a = 56 \rightarrow a = ½$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Hallar el polinomio P con coeficientes reales de grado mínimo que verifica: P tiene dos raíces comunes con $x^3 + 27$, $z = 1 + 2i$ es raíz doble de P y $P(1) = 56$.

$$P(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 3x + 9)(x-(1+2i))(x-(1+2i))(x-(1-2i))(x-(1-2i))$$

$$\big(x-(1+2i)\big) = (x-1-2i)$$
$$\big(x-(1-2i)\big) = (x-1+2i)$$
$$(x-1-2i)(x-1+2i) = (x-1)^2 - (2i)^2 = (x-1)^2 - 4i^2 = x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 2x + 5$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$P(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 3x + 9)(x^2 - 2x + 5)^2$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN