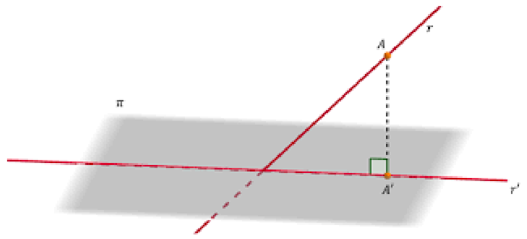
ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL



ÁLGEBRA VECTORIAL: DISTANCIA

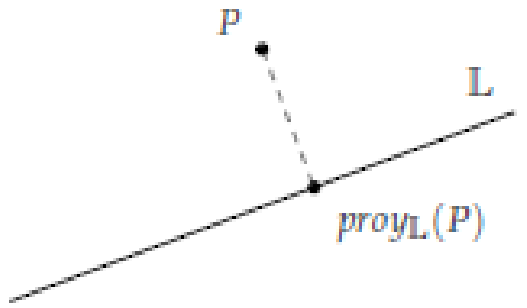
ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)

EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

DISTANCIA

La distancia entre un punto P y una recta L o un plano Π es la mínima de todas las distancias entre P y los puntos de la recta o del plano.
Geométricamente, se observa que el punto de la recta o del plano que está a la distancia mínima de un punto P es la proyección ortogonal de P; en símbolos, $d(P,L) = \|p - proy_L(P)\|$ y $d(P,\Pi) = \|P - proy_\Pi(P)\|$.



A partir de las fórmulas para proyección ortogonal se pueden deducir fórmulas para calcular la distancia entre un punto y una recta o entre un punto y un plano.
Aunque la mejor manera es ayudarse con una representación gráfica, aplicar las fórmulas de proyección ortogonal y luego, utilizar el Teorema de Pitágoras.
Otra manera de resolverlo es aplicando los conceptos de recta, plano y de proyección ortogonal, junto con la fórmula de distancia entre dos puntos.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

DISTANCIA

Fórmulas a utilizar:

Distancia entre dos puntos P = (x_1,y_1,z_1) y Q = (x_2,y_2,z_2):

$$\text{dist}(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia entre un punto A = (x_0,y_0,z_0) y un plano π:

$$d(A,\pi) = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Proyección del vector $\overrightarrow{P_0P}$ sobre la recta L con vector director $\vec{v}$:

$$\left|\overrightarrow{P_0P'}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|$$

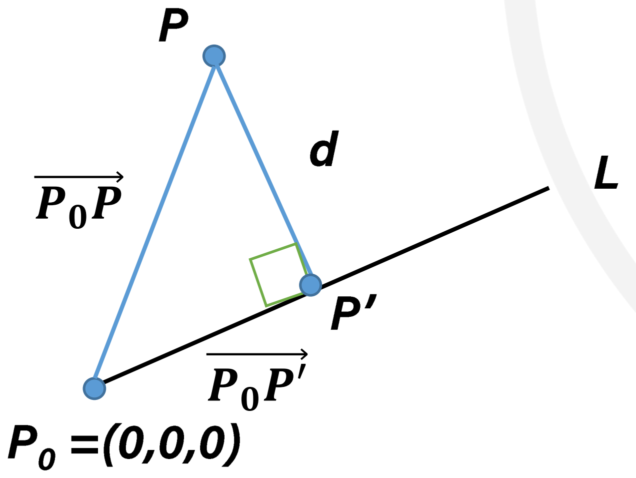
Si se quiere calcular la distancia, se aplica el módulo.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

Calcular la distancia entre el punto P = (-1,0,3) y la recta L: X = λ·(1,2,-1).

P = (-1,0,3) y la recta L: X = λ·(1,2,-1). La recta pasa por el origen.



$\overrightarrow{P_0P'}$ es la proyección del vector $\overrightarrow{P_0P}$ sobre la recta L.
Como se va a calcular distancias se trabaja con los valores absolutos o módulo:

$$\left|\overrightarrow{P_0P'}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{(-1,0,3)\cdot(1,2,-1)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-1+0-3}{\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{6}}\right| = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$\left|\overrightarrow{P_0P}\right| = \sqrt{(-1)^2+(0)^2+(3)^2} = \sqrt{10}$$

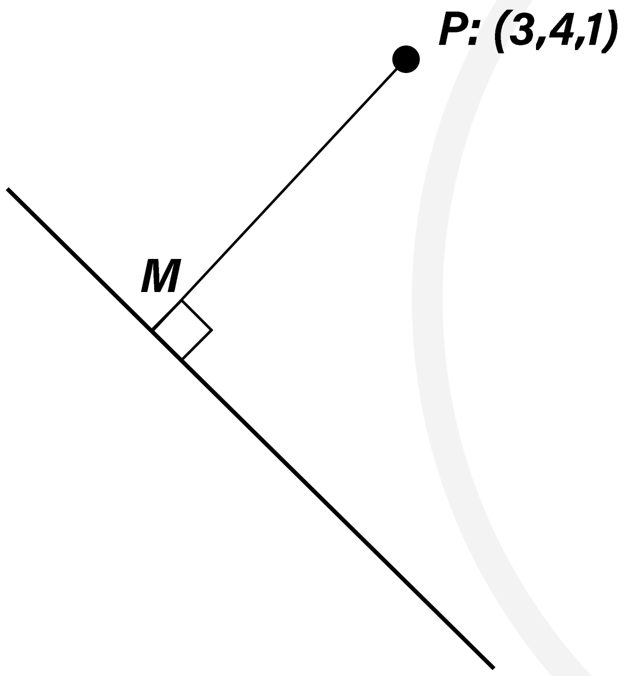
Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\left|\overrightarrow{P_0P}\right|^2 = \left|\overrightarrow{P_0P'}\right|^2 + d^2 \to (\sqrt{10})^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + d^2 \to 10 = \frac{16}{6} + d^2$$

$$d^2 = 10 - \frac{16}{6} \to d^2 = \frac{22}{3} \to d = \sqrt{\frac{22}{3}}$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Hallar la distancia de P = (3,4,1) a la recta L: X = λ(1,0,-1) + (-1,2,1).



L: Vector director: (1,0,-1)
Punto: (-1,2,1)

La distancia a calcular es la más corta entre el punto P y la recta L. La distancia más corta es la determinada por un vector perpendicular a L que comienza en P y termina en la recta L.

M es un punto de la recta L. Entonces, tiene la forma:

$$M = \lambda(1,0,-1) + (-1,2,1) = (\lambda,0,-\lambda) + (-1,2,1) = (\lambda - 1,2,-\lambda + 1)$$

Determinación del vector $\overrightarrow{PM}$:

$$\overrightarrow{PM} = M - P = (\lambda - 1,2,-\lambda + 1) - (3,4,1) = (\lambda - 4,-2,-\lambda)$$

Este vector es perpendicular al vector director de L:

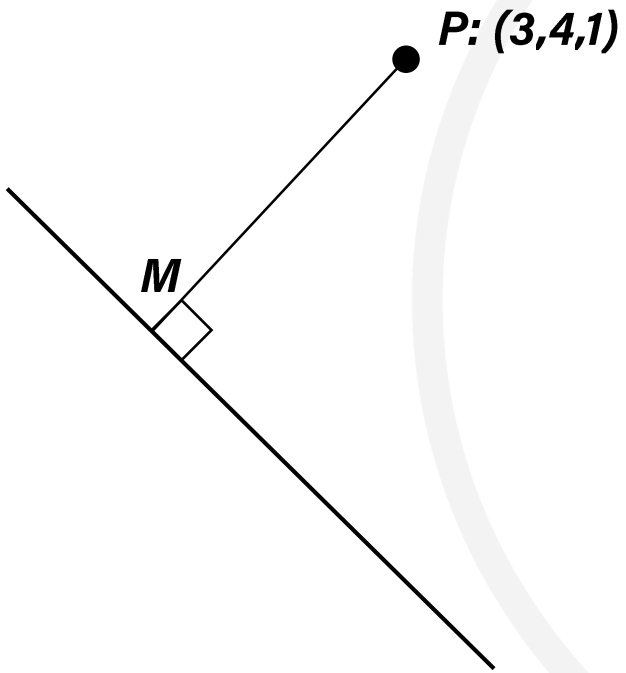
$$(\lambda - 4,-2,-\lambda)\cdot(1,0,-1) = 0$$

$$\lambda - 4 + \lambda = 0$$

$$2\lambda - 4 = 0 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$$

$$M = (2 - 1,2,-2 + 1) = (1,2,-1)$$

Hallar la distancia de P = (3,4,1) a la recta L: X = λ(1,0,-1) + (-1,2,1).



L: Vector director: (1,0,-1)

Punto: (-1,2,1)

M = (1,2,-1)

Cálculo de la distancia (P,M):

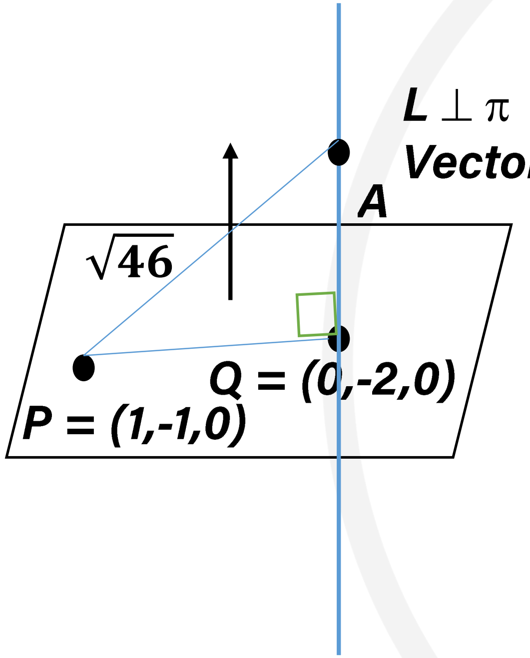
$$Dist(P,M) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$Dist(P,M) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2 + (-1-1)^2}$$

$$Dist(P,M) = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sean P = (1,-1,0) y Q = (0,-2,0) dos puntos en el plano Π: x - y + 3z = 2. Encontrar todos los puntos A, pertenecientes a la recta perpendicular a Π que pasa por Q tal que la hipotenusa del triángulo AQP mida $\sqrt{46}$.



$L \perp \pi$
Vector director: (1,-1,3)

π: x - y + 3z = 2
Vector normal: (1,-1,3)

Ecuación de la recta L:
L: (0,-2,0) + λ(1,-1,3)
El punto A pertenece a la recta:
A: (0,-2,0) + λ(1,-1,3) = (0,-2,0) + (λ,-λ,3λ)
A = (λ,-2 - λ,3λ)
Distancia (P,A) = $\sqrt{46}$
Dist(P,A) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2+(-2-\lambda-(-1))^2+(3\lambda-0)^2}=\sqrt{46}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 9\lambda^2 = 46$$

$$11\lambda^2 + 2 = 46 \rightarrow 11\lambda^2 = 44 \rightarrow \lambda^2 = 4 \rightarrow \lambda = 2 \text{ o } \lambda = -2$$

A = (2;-4;6) o A = (-2;0;-6)

ALEJANDRÍA ACADEMIA DIGITAL

Dados los puntos $P_1 = (1,2,1)$ y $P_2 = (2,1,1)$ encontrar la ecuación paramétrica del plano π que satisface $dist(P_1,Q) = dist(P_2,Q)$ para todo Q perteneciente a π.

Fórmula de la distancia entre dos puntos: $dist(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Sea Q = (x,y,z):

$$dist(P_1,Q) = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

$$dist(P_2,Q) = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

Estas distancias deben ser iguales:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$-2x - 4y = -4x - 2y$$

$$2x - 2y = 0$$

Esta es la ecuación implícita del plano π.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Dados los puntos $P_1 = (1,2,1)$ y $P_2 = (2,1,1)$ encontrar la ecuación paramétrica del plano π que satisface $dist(P_1,Q) = dist(P_2,Q)$ para todo Q perteneciente a π.

$$\pi: 2x - 2y = 0$$

Para escribir la ecuación paramétrica:

$$2x - 2y = 0$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

El plano π está formado por todos los puntos que tienen iguales las dos primeras coordenadas y la tercera coordenada puede tener cualquier valor.

Esto significa que los puntos del plano π tienen la forma (x,x,z):

$$(x,x,z) = (x,x,0) + (0,0,z)$$

$$x(1,1,0) + z(0,0,1)$$

$$\pi: (x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1)$$

Esta es la ecuación paramétrica del plano π.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN