ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

$$(x^2 - 3x + 5) + \cdots$$
$$\cdots (2x^2 - 7x - 4)$$

POLINOMIOS: RAÍCES REALES Y COMPLEJAS

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)
EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

$P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$

Teorema de Gauss: Las raíces de un polinomio $P(x) \in Z[x]$ y $a_0 \neq 0$ son de la forma p/q, donde p son los divisores de a_0 y q son los divisores del cp(P).

Divisores de 4: p: $\pm1, \pm2, \pm4$

Divisores de 3: q: $\pm1, \pm3$

Posibles raíces de P: p/q: $\pm1, \pm1/3, \pm2, \pm2/3, \pm4, \pm 4/3$

$P(1) = 3(1)^3 + (1)^2 + 12(1) + 4 = 3 + 1 + 12 + 4 = 20 \neq 0$ (No es raíz)

$P(-1) = -10 \neq 0$ (No es raíz)

$P(1/3) = 74/9 \neq 0$ (No es raíz)

$P(-1/3) = 0$ (Es raíz)

$P(2) = 56 \neq 0$ (No es raíz)

$P(-2) = -40 \neq 0$ (No es raíz)

$P(2/3) = 40/3 \neq 0$ (No es raíz)

$P(-2/3) = -40/9 \neq 0$ (No es raíz)

$P(4) = 260 \neq 0$ (No es raíz)

$P(-4) = -220 \neq 0$ (No es raíz)

$P(4/3) = 260/9 \neq 0$ (No es raíz)

$P(-4/3) = -52/3 \neq 0$ (No es raíz)

Determinar todas las raíces de P en C y escribirlo como producto de polinomios irreducibles en C[x] y en R[x]: $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

$P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$
$P(-1/3) = 0$ (Es raíz)
$-1/3$ es raíz

	3	1	12	4
-1/3		-1	0	-4
	3	0	12	0

$3x^2 + 0x + 12 = 3x^2 + 12$
$3x^2 + 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = -12 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-4} \rightarrow x = \sqrt{4(-1)} \rightarrow x = \pm 2i$$

Las raíces de P son $-1/3$, $2i$ y $-2i$
$3x^3 + x^2 + 12x + 4 = (x + 1/3)(x - 2i)(x + 2i)$ en C[x]
$3x^3 + x^2 + 12x + 4 = (x + 1/3)(3x^2 + 12)$ en R[x]

Determinar todas las raíces de P en C y escribirlo como producto de polinomios irreducibles en C[x] y en R[x]: $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$.

Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 9x - 18$ sabiendo que tiene por lo menos una raíz común con $Q(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$.

Como tiene por lo menos una raíz común con Q(x), se determinan las raíces de Q(x).

El polinomio Q(x) se puede factorizar por factor común:

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = x^2(x - 1) + 9(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 9)$$

Esto significa que una de las raíces de Q(x) es $x_1 = 1$.

Para determinar las otras raíces se resuelve $x^2 + 9 = 0$:

$$x^2 + 9 = 0 \to x^2 = -9 \to \sqrt{x^2} = \sqrt{-9} \to x = \pm\sqrt{(-1)9} \to x = \pm 3\sqrt{-1} \to x = \pm 3i$$

Entonces, las raíces de Q(x) son 1, 3i y -3i.

Se verifica cuál o cuáles de ellas son raíces de P(x):

$$P(1) = 1^5 - 1^4 + 8(1)^3 - 11(1)^2 - 9(1) - 18 = 1 - 1 + 8 - 11 - 9 - 18 = -30 \neq 0 \text{ (No es raíz)}$$

Como 1 no es raíz, necesariamente 3i y -3i son raíces de P(x), ya que cuando un número imaginario es raíz, también lo es su conjugado.

P(x) puede expresarse:

$$P(x) = S(x)(x^2 + 9)$$

Se tiene que calcular S(x).

ALEJANDRÍA ACADEMIA DIGITAL

Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 9x - 18$ sabiendo que tiene por lo menos una raíz común con $Q(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$.

$$P(x) = S(x)(x^2 + 9)$$
$$S(x) = P(x):(x^2 + 9)$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 9x - 18 & x^2 + 0x + 9 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5 - 0x^4 - 9x^3} & x^3 - x^2 - x - 2 \\
\quad -x^4 - x^3 - 11x^2 & \\
\quad \underline{x^4 + 0x^3 + 9x^2} & \\
\qquad -x^3 - 2x^2 - 9x & \\
\qquad \underline{x^3 + 0x^2 + 9x} & \\
\qquad\quad -2x^2 + 0x - 18 & \\
\qquad\quad \underline{2x^2 + 0x + 18} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$P(x) = (x^3 - x^2 - x - 2)(x^2 + 9)$$

Cálculo de las raíces de $S(x)$ por Gauss:

Divisores de 2 (TI): $\pm1, \pm2$

Divisores de 1 (CP): ±1

Posibles raíces: $\pm1, \pm2$

$S(1) = 1^3 - 1^2 - 1 - 2 = -3 \neq 0$ (No es raíz)

$S(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 2 = -3 \neq 0$ (No es raíz)

$S(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$ (Es raíz)

$S(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) - 2 = -12 \neq 0$ (No es raíz)

Como 2 es raíz de S:

$$S(x) = M(x)(x - 2)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 9x - 18$ sabiendo que tiene por lo menos una raíz común con $Q(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$.

$$P(x) = (x^3 - x^2 - x - 2)(x^2 + 9)$$

$$S(x) = M(x)(x - 2) \rightarrow M(x) = S(x):(x - 2)$$

Aplicando Ruffini:

	1	-1	-1	-2
2		2	2	2
	1	1	1	0

$$S(x) = (x^2 + x + 1)(x - 2)$$
$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 9)$$

Resolviendo $x^2 + x + 1$ con la resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3(-1)}}{2} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Las raíces de $P(x)$ son $x_1 = 2$; $x_2 = 3i$; $x_3 = -3i$; $x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$$x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Factorización en R[x]: $P(x) = (x - 2)(x^2 + 9)(x^2 + x + 1)$

Factorización en C[x]: $P(x) = (x - 2)(x - 3i)(x + 3i)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN