ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x-y=3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRICES: SISTEMAS HOMOGÉNEOS

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)
EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

$$\begin{cases} 5X+6Y = 20 \\ 3X+8Y = 34 \end{cases}$$

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Sistemas lineales:

Propiedades: Sea $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ $(b \neq 0)$, $S_0 = \{x \in R^n: Ax = 0\}$ ***y*** $S_b = \{x \in R^n: Ax = b\}$.

a)Si $x \in S_0$ ***e*** $y \in S_0$, ***entonces*** $x + y \in S_0$ ***y*** $k \in R$, ***entonces*** $kx \in S_0$.

Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b)Si $x \in S_b$ ***e*** $y \in S_b$, ***entonces*** $x - y \in S_0$.

Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

c)Si s es una solución particular del sistema $Ax = b$ ***(es decir,*** $s \in S_b$***), entonces:***

$$S_b = S_0 + s = \{y \in R^n: y = x + s, \text{ con } x \in S_0\}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $Ax = b$ ***puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.***

Sea $A \in R^{3x3}$. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a)Hallar una solución de $Ax = 0$.

b)Hallar una recta de soluciones de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c)Hallar cuatro soluciones de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

a)La diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in S_0$$

b)Como se tienen dos soluciones particulares, se construye una recta a partir de esas dos soluciones:

$$L: X_1 + \lambda(X_2 - X_1) \to L: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \to L: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sea $A \in R^{3x3}$. Si $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ son soluciones de $Ax = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$.

a)Hallar una solución de Ax = 0.

b)Hallar una recta de soluciones de $Ax = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$

c)Hallar cuatro soluciones de $Ax = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$

$$L: \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

c)Para hallar cuatro soluciones, se seleccionan 4 valores de λ:

$$\lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\5\end{pmatrix}; \lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\8\end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\-7\end{pmatrix}; \lambda = -3 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\\-10\end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Sean (1,3,1), (2,2,4) y (2,0,4) soluciones de un sistema lineal no homogéneo.
a)Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.
b)Encontrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

Como el sistema tiene más de una solución es un sistema compatible indeterminado (SCI),
a)La diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.
Las rectas se pueden formar a partir de las soluciones del sistema no homogéneo:

$$(1,3,1) - (2,2,4) = (-1,1,-3)$$
$$(2,2,4) - (2,0,4) = (0,2,0)$$

La suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

$L_1:(x.y,z) = \alpha(-1,1,-3)$ *y* $L_2:(x.y,z) = \beta(0,2,0)$ *son dos de las rectas solicitadas.*

EJERCICIO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sean (1,3,1), (2,2,4) y (2,0,4) soluciones de un sistema lineal no homogéneo.
a)Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.
b)Encontrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

$$L_1: \alpha(-1,1,-3) \text{ y } L_2: \beta(0,2,0)$$

b)Cualquier solución del sistema Ax = b puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

$$\pi: (x,y,z) = (1,3,1) + \alpha(-1,1,-3) + \beta(0,2,0)$$

Ecuación implícita:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 3 + \alpha + 2\beta \\ z = 1 - 3\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - x \\ 3\alpha = 1 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1-z}{3} \end{cases}$$

Igualando ambos despejes de α***:*** $1 - x = \frac{1-z}{3} \rightarrow 3 - 3x = 1 - z \rightarrow -3x + z = -2$

$$\pi: -3x + z = -2$$

EJERCICIO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Determinar todas las matrices B que verifican

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Sea B = $\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+2z=1\\y+2t=0\\z=0\\t=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+2(0)=1\\y+2(1)=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN