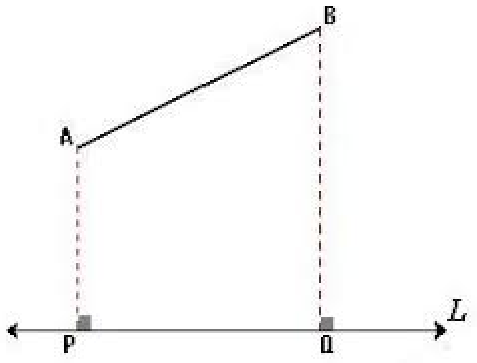
ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

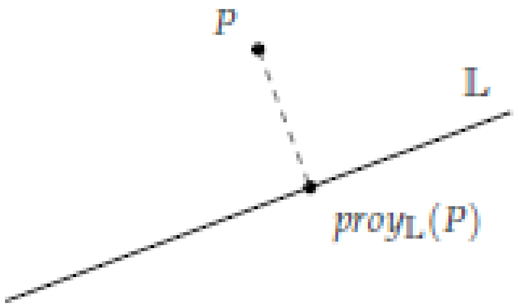


ÁLGEBRA VECTORIAL: PROYECCIÓN ORTOGONAL

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)
EFRAÍN CAMACHO

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA EN R^2

Dados un punto P y una recta L en R^2, la proyección ortogonal de P sobre L es el punto $proy_L$(P) que resulta de intersecar a la recta L con la recta perpendicular a L que pasa por P.



Si L: ax + by = c, la proyección ortogonal de P se puede calcular como:

$$proy_L(P) = \frac{c - P \cdot (a,b)}{\|(a,b)\|^2}(a,b) + P$$

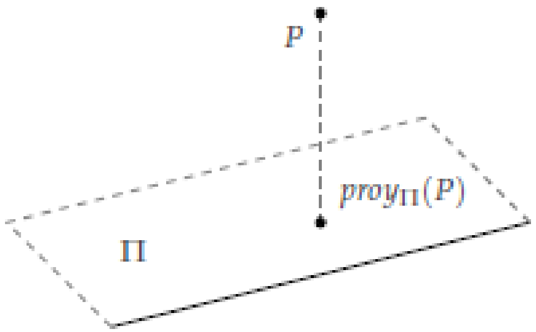
Si L: X = λ·v + Q (λ ∈ R), entonces:

$$proy_L(P) = \frac{(P - Q) \cdot v}{\|v\|^2} v + Q$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO EN R^3

Dados un punto P y un plano Π en R^3, la proyección ortogonal de P sobre Π es el punto $proy_{\Pi}(P)$ que resulta de intersecar a Π con la recta perpendicular a Π que pasa por P.



Si Π: ax + by + cz = d, llamando N = (a,b,c) (vector normal a Π), se tiene que:

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{d - P \cdot N}{\|N\|^2} N + P$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA EN R^3

Si P es un punto y L una recta en R^3, la proyección de P sobre L es la intersección de la recta con el plano perpendicular a L que pasa por P.
Si L: $X = \lambda \cdot v + Q$ ($\lambda \in R$), entonces;

$$proy_L(P) = \frac{(P - Q) \cdot v}{\|v\|^2} v + Q$$

Dado un vector v (en R^2 o R^3), se nota $proy_v(P)$ a la proyección ortogonal de P sobre la recta L: $X = \lambda \cdot v$ ($\lambda \in R$). Se tiene que:

$$proy_v(P) = \frac{P \cdot v}{\|v\|^2} v$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

Hallar la proyección ortogonal de:
a)P = (5,-3) sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.
b)P = (5,-3) sobre la recta L: X = λ·(1,1).
c)P = (1,0,2) sobre la recta L: X = λ·(2,-1,0).
d)P = (-1,1,0) sobre el plano Π: 2x – 3z = 0.

a)P = (5,-3) sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.
El eje de las x tiene como ecuación vectorial: L: X = λ(1,0).

$$proy_v(P) = \frac{P \cdot v}{\|v\|^2} v$$

$$proy_v(P) = \frac{(5,-3)\cdot(1,0)}{1^2+0^2}(1,0) = \frac{5-0}{1}(1,0) = 5(1,0) = (5,0)$$

El eje de las y tiene como ecuación vectorial: L: X = λ(0,1).

$$proy_v(P) = \frac{(5,-3)\cdot(0,1)}{0^2+1^2}(0,1) = \frac{0-3}{1}(0,1) = -3(0,1) = (0,-3)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

Hallar la proyección ortogonal de:
a)P = (5,-3) sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.
b)P = (5,-3) sobre la recta L: X = λ·(1,1).
c)P = (1,0,2) sobre la recta L: X = λ·(2,-1,0).
d)P = (-1,1,0) sobre el plano Π: 2x – 3z = 0.

b)P = (5,-3) sobre la recta L: X = λ·(1,1).

$$proy_v(P) = \frac{P \cdot v}{\|v\|^2} v$$

$$proy_v(P) = \frac{(5,-3)\cdot(1,1)}{1^2+1^2}(1,1) = \frac{5-3}{2}(1,1) = 1(1,1) = (1,1)$$

c)P = (1,0,2) sobre la recta L: X = λ·(2,-1,0).

$$proy_v(P) = \frac{(1,0,2)\cdot(2,-1,0)}{2^2+(-1)^2+0^2}(2,-1,0) = \frac{2+0+0}{5}(2,-1,0) = \frac{2}{5}(2,-1,0) = \left(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0\right)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

Hallar la proyección ortogonal de:
a)P = (5,-3) sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.
b)P = (5,-3) sobre la recta L: X = λ·(1,1).
c)P = (1,0,2) sobre la recta L: X = λ·(2,-1,0).
d)P = (-1,1,0) sobre el plano Π: 2x – 3z = 0.

d)P = (-1,1,0) sobre el plano Π: 2x – 3z = 0.
N = (2,0,-3); d = 0

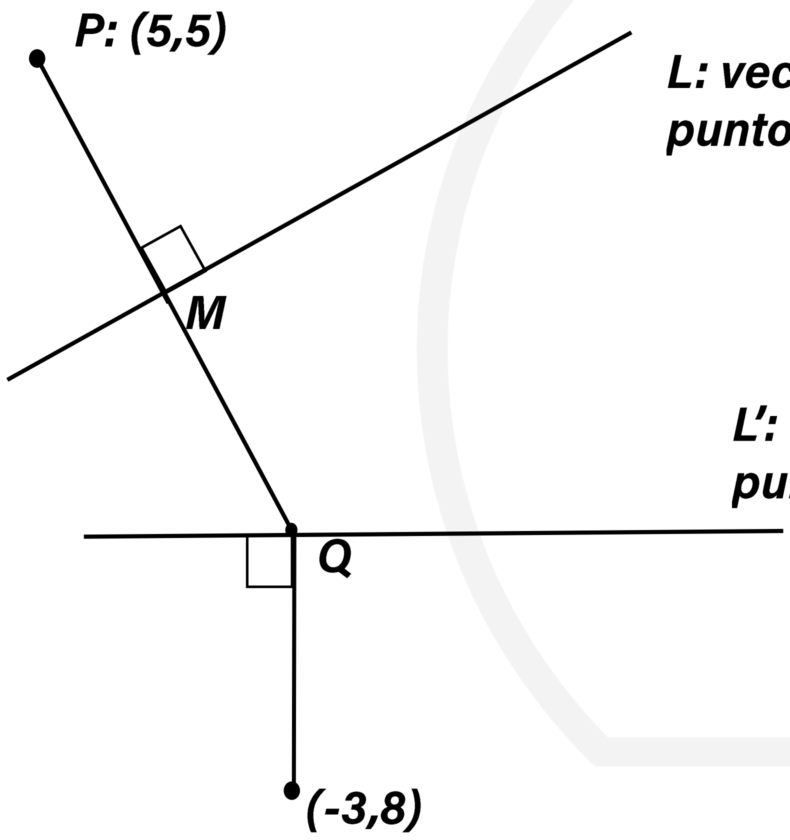
$$proy_{\Pi}(P) = \frac{d - P\cdot N}{\|N\|^2} N + P$$

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{0-(-1,1,0)\cdot(2,0,-3)}{2^2+0^2+(-3)^2}(2,0,-3)+(-1,1,0) = \frac{0-(-2+0+0)}{13}(2,0,-3)+(-1,1,0)$$

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{2}{13}(2,0,-3)+(-1,1,0) = \left(\frac{4}{13},0,-\frac{6}{13}\right)+(-1,1,0) = \left(-\frac{9}{13},1,-\frac{6}{13}\right)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

Sean P = (5,5), L: $\lambda(1,2)$ y Q es el simétrico de P respecto de L. Encontrar la recta L′ tal que Q sea la proyección ortogonal de (-3,8) sobre L′



L: vector director: (1,2);
punto: (0,0)

L′: vector director: ?;
punto: Q

M es un punto de L. Entonces tiene la forma $M = (\lambda, 2\lambda)$,

El vector $\overrightarrow{PM}$ es perpendicular al vector director de L: $\overrightarrow{PM}\cdot(1,2) = 0$.

El vector $\overrightarrow{PM}$ se puede escribir:

$$\overrightarrow{PM} = M - P = (\lambda,2\lambda) - (5,5) = (\lambda - 5, 2\lambda - 5)$$

$$\overrightarrow{PM}\cdot(1,2) = 0 \rightarrow (\lambda - 5, 2\lambda - 5)\cdot(1,2) = 0$$

$$\lambda - 5 + (2\lambda - 5)\cdot 2 = 0$$

$$\lambda - 5 + 4\lambda - 10 = 0$$

$$5\lambda - 15 = 0$$

$$5\lambda = 15$$

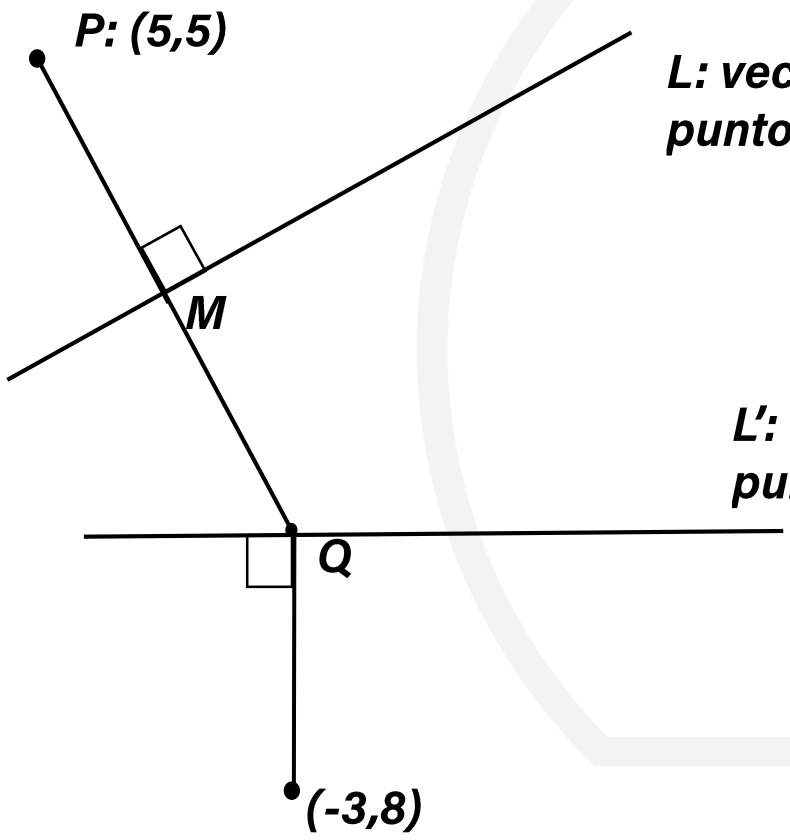
$$\lambda = 3 \rightarrow M = (3,6)$$

$$\overrightarrow{PM} = M - P = (3,6) - (5,5) = (-2,1)$$

El punto M es el punto medio entre P y Q:

$$M = \frac{P+Q}{2}$$

3)Sean P = (5,5), L: λ(1,2) y Q es el simétrico de P respecto de L. Encontrar la recta L' tal que Q sea la proyección ortogonal de (-3,8) sobre L'



L: vector director: (1,2);
punto: (0,0)

L': vector director: ?;
punto: Q

M = (3,6)

$\overrightarrow{PM} = (-2,1)$

$$M = \frac{P+Q}{2} \rightarrow 2M = P + Q \rightarrow$$

$$Q = 2M - P$$

Q = 2(3,6) - (5,5) = (1,7)

Vector que va de Q a (-3,8):

(-3,8) - (1,7) = (-4,1)

Este vector es perpendicular al vector director de L'.

Un vector perpendicular a (-4,1) es (1,4).

Entonces, la ecuación de L' es:

L': (x,y) = (-3,8) + α(1,4)

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN