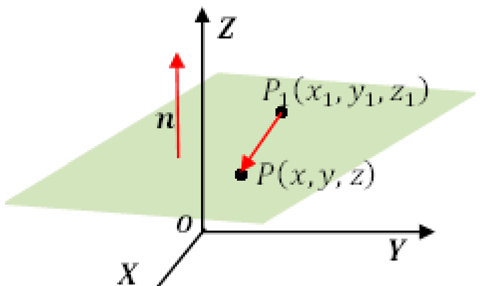



Figura 1

# ÁLGEBRA VECTORIAL: PLANO EN EL ESPACIO

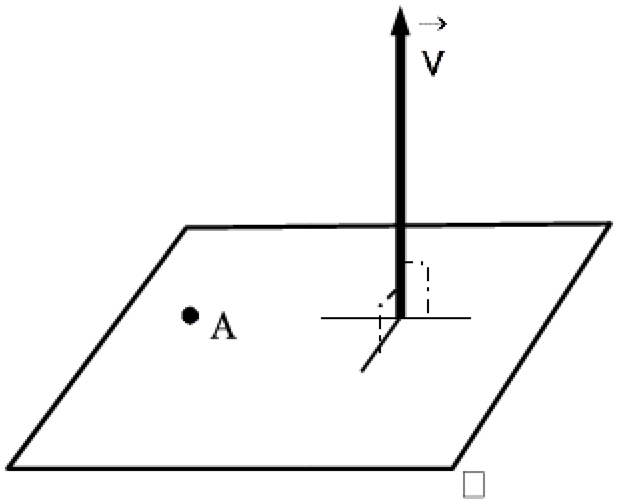
ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)

EFRAÍN CAMACHO

# PLANO EN EL ESPACIO

***Para definir un plano en el espacio, se necesitan dos elementos: un Punto perteneciente al plano y un vector normal al plano.***

***Un vector normal al plano es un vector perpendicular a plano (forma un ángulo de 90° con el plano).***




***Ecuación Implícita:***

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{N} = (A,B,C)$$

# EJERCICIO

***Ecuación implícita del plano $\Pi$.***
***Contiene a L: $X = \lambda(1,2,-1) + (3,0,0)$ y L': $X = \lambda(-2,-4,1) + (5,4,-3)$***
***Se necesita un vector normal y un punto del plano. Puntos del plano (3,0,0) y (5,4,-3).***
***Falta el vector normal.***
***El vector normal es perpendicular a los vectores directores de las rectas.***

$$N = v_L \times v_{L'} = (1,2,-1) \times (-2,-4,1)$$

$$N = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) = (2(1) - (-1)(-4), (-1)(-2) - 1(1), 1(-4) - 2(-2)) = (-2,1,0)$$

$$\text{Ecuación implícita: } Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow -2x + y + D = 0$$

***Para calcular D, se toma uno de los puntos del plano. Tomando (3,0,0):***

$$-2(3) + 0 + D = 0 \rightarrow -6 + D = 0 \rightarrow D = 6$$

$$\Pi: -2x + y + 6 = 0$$

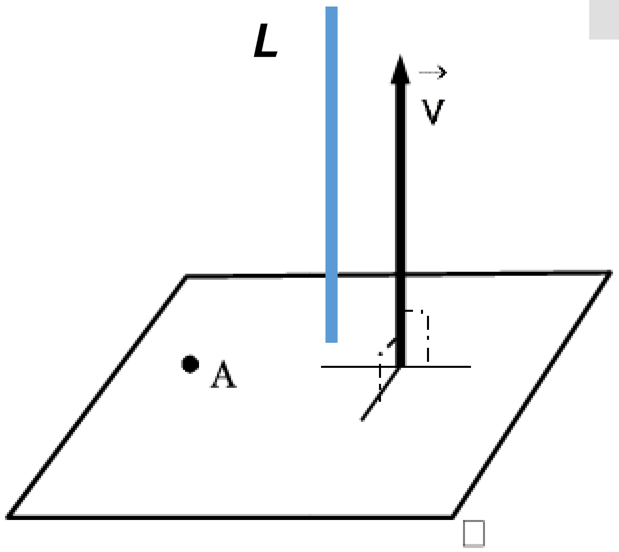
***Dar una ecuación implícita del plano $\Pi$ que contiene a las rectas transversales L: $X = \lambda(1,2,-1) + (3,0,0)$ y L': $X = \lambda(-2,-4,1) + (5,4,-3)$.***

# EJERCICIO

*Ecuación paramétrica de una recta L.*
*Se necesita un vector director de L y un punto de L. El punto es (0,1,-2).*
*Falta el vector director.*
*L es perpendicular al plano Π: 4x – 2y + z = 3. N = (4,-2,1),*
*El vector director de L es paralelo al vector normal del plano.*
*El vector director de la recta puede ser (4,-2,1)*

*L: (x,y,z) = (0,1,-2) + λ(4,-2,1) (Ecuación vectorial)*

$$L = \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \lambda \in R \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$




*Dar una ecuación paramétrica de una recta en $R^3$ que es perpendicular al plano Π: 4x – 2y + z = 3 y pasa por el punto (0,1,-2).*

# ECUACIÓN PARAMÉTRICA DEL PLANO

***Si los puntos P, Q y R no están alineados y pertenecen al plano $\Pi$, resulta que $\Pi$ es el conjunto de todos los X que cumplen:***

$$X = \alpha \cdot (P - R) + \beta \cdot (Q - R) + R, \text{ para } \alpha, \beta \in R.$$

***Esta es la Ecuación Paramétrica de un Plano.***

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

# EJERCICIO

***Ecuación paramétrica de un plano:*** $X = \alpha\cdot(P - R) + \beta\cdot(Q - R) + R$, ***para*** $\alpha,\beta \in R$.
$P = (2,-1,7)$; $Q = (0,2,3)$; $R = (-2,5,-1)$

$$(x,y,z) = \alpha(4,-6,8) + \beta(2,-3,4) + (-2,5,-1),\ \alpha,\beta \in R.$$

*Hallar una ecuación paramétrica del plano* $\Pi_1$ *que pasa por* $P = (2,-1,7)$, $Q = (0,2,3)$ *y* $R = (-2,5,-1)$.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

# EJERCICIO

***Se tiene la ecuación paramétrica del plano y piden la ecuación implícita:***

***Ecuación implícita: $Ax + By + Cz + D = 0$***

***Vector normal $N = (A,B,C)$***

$$N = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$N = (0(1) - 5(3), 5(-1) - 1(1), 1(3) - 0(-1)) = (-15,-6,3)$$

***Ecuación implícita: $-15x - 6y + 3z + D = 0$***

***El punto $(1,-1,2)$ pertenece al plano:***

$$-15(1) - 6(-1) + 3(2) + D = 0 \rightarrow -15 + 6 + 6 + D = 0 \rightarrow D = 3$$

$$\Pi_1: -15x - 6y + 3z + 3 = 0$$

***Dar en $R^3$ la ecuación implícita del plano $\Pi_1$: $X = \alpha(1,0,5) + \beta(-1,3,1) + (1,-1,2)$.***

# EJERCICIO

*Plano perpendicular a L: $X = \beta(0,1,1) + (1,3,-1)$ y pasa por $(3,2,1)$*
*Vector director de L es $(0,1,1)$.*
*Como L es perpendicular al plano, entonces el vector director de L es paralelo al vector normal del plano.*
*$N = (0,1,1)$*
*Se tienen que buscar dos vectores v y w que sean perpendiculares a N.*
*Estos vectores pueden ser $(0,-1,1)$ y $(0,1,-1)$, ya que:*

$$(0,1,1)\cdot(0,-1,1) = 0 \text{ y } (0,1,1)\cdot(0,1,-1) = 0$$

*Ecuación paramétrica: $\alpha(0,-1,1) + \beta(0,1,-1) + (3,2,1)$*

*Dar en $R^3$ la ecuación paramétrica del plano perpendicular a la recta L: $X = \beta(0,1,1) + (1,3,-1)$ que pasa por $(3,2,1)$.*

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

# EJERCICIO

*Plano $\Pi$: $2x - 3y + 7z = 3$*
*$L_1$: $X = \lambda(2,1,-1) + (-2,4,1)$*
*Intersección $\Pi \cap L_1$*
*Posibilidades:*

1) *La recta corta al plano en un punto*
2) *La recta es paralela al plano (No se cortan)*
3) *La recta esté contenida en el plano (la intersección es la misma recta)*

*Ecuación paramétrica de $L_1$:* $\begin{cases} x = 2\lambda - 2 \\ y = \lambda + 4 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$

*Dados el plano $\Pi$: $2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $L_1$: $X = \lambda(2,1,-1) + (-2,4,1)$, $L_2$: $X = \lambda(2,-1,1) + (-7,-1,2)$ y $L_3$: $\lambda(1,4,2) + (1,0,1)$: Calcular las intersecciones $\Pi \cap L_1$, $\Pi \cap L_2$ y $\Pi \cap L_3$ y dar sus posiciones relativas.*

# EJERCICIO

***Plano $\Pi$: 2x – 3y + 7z = 3***
***$L_1$: X = $\lambda$(2,1,-1) + (-2,4,1)***
***Intersección $\Pi \cap L_1$***

***Ecuación paramétrica de $L_1$:*** $\begin{cases} x = 2\lambda - 2 \\ y = \lambda + 4 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$

***Sustituir en la ecuación del plano, cada ecuación paramétrica:***

$$2x - 3y + 7z = 3 \rightarrow 2(2\lambda - 2) - 3(\lambda + 4) + 7(-\lambda + 1) = 3 \rightarrow 4\lambda - 4 - 3\lambda - 12 - 7\lambda + 7 = 3 \rightarrow -6\lambda - 9 = 3$$

$$-6\lambda = 12 \rightarrow \lambda = -2$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 2 \rightarrow x = -6 \\ y = \lambda + 4 \rightarrow y = 2 \\ z = -\lambda + 1 \rightarrow z = 3 \end{cases}$$

$$\Pi \cap L_1 = (-6,2,3)$$

***Dados el plano $\Pi$: 2x – 3y + 7z = 3 y las rectas $L_1$: X = $\lambda$(2,1,-1) + (-2,4,1), $L_2$: X = $\lambda$(2,-1,1) + (-7,-1,2) y $L_3$: $\lambda$(1,4,2) + (1,0,1): Calcular las intersecciones $\Pi \cap L_1$, $\Pi \cap L_2$ y $\Pi \cap L_3$ y dar sus posiciones relativas.***

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

# EJERCICIO

***Plano $\Pi$: 2x – 3y + 7z = 3***
***$L_2$: X = $\lambda$(2,-1,-1) + (-7,-1,2)***
***Intersección $\Pi \cap L_2$***

***Ecuación paramétrica de $L_2$:*** $\begin{cases} x = 2\lambda - 7 \\ y = -\lambda - 1 \\ z = -\lambda + 2 \end{cases}$

***Sustituir en la ecuación del plano, cada ecuación paramétrica:***

$$2x - 3y + 7z = 3 \rightarrow 2(2\lambda - 7) - 3(-\lambda - 1) + 7(-\lambda + 2) = 3 \rightarrow 4\lambda - 14 + 3\lambda + 3 - 7\lambda + 14 = 3 \rightarrow$$

$$3 = 3 \text{ (Igualdad)}$$

$$\Pi \cap L_2 = L_2 \text{ (la recta está contenida en el plano)}$$

***Dados el plano $\Pi$: 2x – 3y + 7z = 3 y las rectas $L_1$: X = $\lambda$(2,1,-1) + (-2,4,1), $L_2$: X = $\lambda$(2,-1,1) + (-7,-1,2) y $L_3$: $\lambda$(1,4,2) + (1,0,1): Calcular las intersecciones $\Pi \cap L_1$, $\Pi \cap L_2$ y $\Pi \cap L_3$ y dar sus posiciones relativas.***

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

# EJERCICIO

*Plano $\Pi$: $2x - 3y + 7z = 3$*
*$L_3$: $X = \lambda(-1,4,2) + (1,0,1)$*
*Intersección $\Pi \cap L_3$*

*Ecuación paramétrica de $L_3$:* $\begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = 4\lambda \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases}$

*Sustituir en la ecuación del plano, cada ecuación paramétrica:*

$2x - 3y + 7z = 3 \rightarrow 2(-\lambda + 1) - 3(4\lambda) + 7(2\lambda + 1) = 3 \rightarrow -2\lambda + 2 - 12\lambda + 14\lambda + 7 = 3 \rightarrow 9 = 3$ *(Absurdo)*

$\Pi \cap L_3 = \varnothing$ *(la recta es paralela al plano)*

*Dados el plano $\Pi$: $2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $L_1$: $X = \lambda(2,1,-1) + (-2,4,1)$, $L_2$: $X = \lambda(2,-1,1) + (-7,-1,2)$ y $L_3$: $\lambda(1,4,2) + (1,0,1)$: Calcular las intersecciones $\Pi \cap L_1$, $\Pi \cap L_2$ y $\Pi \cap L_3$ y dar sus posiciones relativas.*

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

# GRACIAS POR TU ATENCIÓN