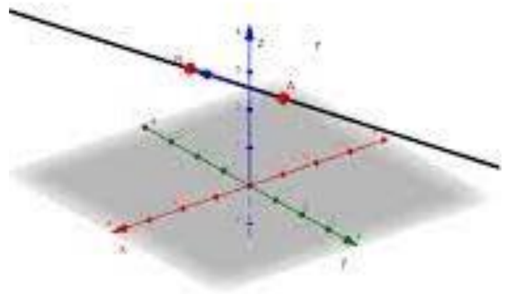
ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL



ÁLGEBRA VECTORIAL: RECTA EN EL ESPACIO

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)
EFRAÍN CAMACHO

RECTA EN EL ESPACIO

Para definir una recta en el espacio, se necesitan dos elementos: un punto perteneciente a la recta y el vector director de la recta.

Sea $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ un punto y $\vec{u} = (u_x,u_y,u_z)$ un vector. La Ecuación Vectorial de la Recta r generada por P_0 y $\vec{u}$, sería:

$$(x,y,z) = P_0 + \lambda\vec{u},\ \lambda \in R$$

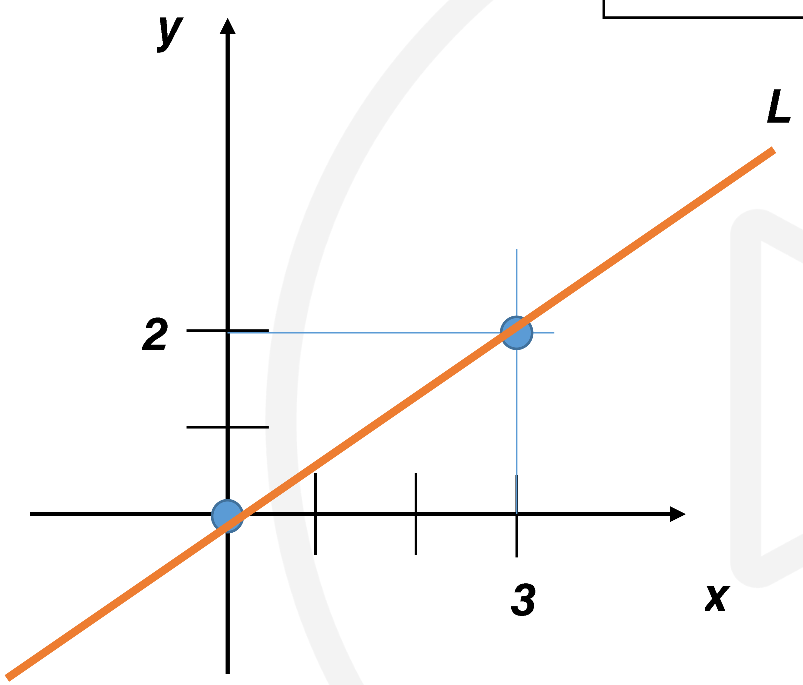
$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(u_x,u_y,u_z),\ \lambda \in R$$

Por ejemplo, si $P_0 = (1,-2,3)$ y $\vec{u} = (-4,5,-6)$ un vector. La Ecuación Vectorial de la Recta r generada por P_0 y $\vec{u}$, sería:

$$(x,y,z) = (1,-2,3) + \lambda(-4,5,-6),\ \lambda \in R$$

En el caso del Plano R^2, se aplica algo parecido, pero con dos coordenadas.

EJERCICIO



Ecuación vectorial de la recta L:
Punto y vector director
Falta el vector director:
Vector PQ = (0 – 3;0 – 2) = (-3;-2)
L: (x,y) = (3,2) + λ(-3,-2), $\lambda \in R$

Sea L $\subset$ R^2 la recta que pasa por los puntos (3,2) y (0,0). Graficarla.

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

Se deduce de la Ecuación vectorial, igualando cada una de las componentes homólogas.

Ecuación vectorial:

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(u_x,u_y,u_z),\ \lambda \in R$

Ecuación Paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x \\ y = y_0 + \lambda u_y\,, \quad \lambda \in R \\ z = z_0 + \lambda u_z \end{cases}$$

Ejemplo:

$(x,y,z) = (1,-2,3) + \lambda(-4,5,-6)$

Ecuación Paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = -2 + 5\lambda, \quad \lambda \in R \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

L: X = λ(1,2) + (3,2) → (x,y) = λ(1,2) + (3,2)
Punto: (3,2). Vector director: (1,2)

L_1 paralela a L que pase por (0,0):
Un punto de L_1: (0,0)
Vector director de L_1: El mismo de L porque son paralelas: (1,2)
L_1: (x,y) = (0,0) + α(1,2) → (x,y) = α(1,2), α ∈ R
Ecuación paramétrica: L_1: $\begin{cases} x = 0 + \alpha \\ y = 0 + 2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}, \alpha \in R$

Dada la recta L: X = λ(1,2) + (3,2), dar una ecuación paramétrica para la recta L_1 paralela a L que pasa por (0,0).

EJERCICIO

L pasa por (-1,2) y (0,3)
Vector director: (0 – (-1),3 – 2) = (1,1)
Ecuación vectorial de L: $(x,y) = (-1,2) + \lambda(1,1),\ \lambda \in R$

L_1 perpendicular a L y pase por (0,0):
Punto de L_1: (0,0)
El vector director de L y el de L_1 deben ser perpendiculares.
Tenemos que hallar un vector perpendicular a (1,1).
Este vector puede ser (-1,1) porque $(1,1)\cdot(-1,1) = 1(-1) + 1(1) = -1 + 1 = 0$
El vector director de L_1 es (-1,1)
Ecuación vectorial de L_1: $(x,y) = (0,0) + \alpha(-1,1) \to (x,y) = \alpha(-1,1),\ \alpha \in R$
Ecuación paramétrica de L_1: $\begin{cases} x = 0 - \alpha \\ y = 0 + \alpha \end{cases} \to \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases}, \alpha \in R$

Sea L la recta que pasa por (-1,2) y (0,3). Hallar una ecuación paramétrica de la recta L_1 perpendicular a L que pasa por (0,0).

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

ECUACIÓN IMPLÍCITA DE LA RECTA

Sea el plano R^2. Si $v = (v_1,v_2)$, $P = (p_1,p_2)$, $X = (x,y)$ y $c = v_2p_1 - v_1p_2$, la recta L es el conjunto de soluciones de la ecuación:

$$v_2x - v_1y = c$$

Esta ecuación es una ecuación implícita para L.

Ejemplo:

$$(x,y) = (1,-2) + \lambda(-4,5)$$
$$v = (-4,5)$$
$$P = (1,-2)$$
$$c = (5)(1) - (-4)(-2) = 5 - 8 = -3$$

Ecuación Implícita: $5x - (-4)y = -3 \rightarrow 5x + 4y = -3$

EJERCICIO

L_2 pasa por (0,1) y (-3,2):
$v = (-3 - 0, 2 - 1) = (-3,1)$

$$L_2: X = \alpha(-3,1) + (0,1)$$
$$v = (-3, 1)$$
$$P = (0,1)$$
$$c = v_2 p_1 - v_1 p_2 = (1)0 - (-3)(1) = 0 + 3 = 3$$
$$v_2 x - v_1 y = c \rightarrow x + 3y = 3$$

Dada L_2 la recta que pasa por los puntos (0,1) y (-3,2), Dar la ecuación implícita para L_2.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

Ecuación implícita:

L_1: $-x + 3y = 2$

$x = 0 \rightarrow -0 + 3y = 2 \rightarrow y = 2/3 \rightarrow (0,2/3)$

$y = 0 \rightarrow -x + 3(0) = 2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2,0)$

L_2: $-2x + 6y = -3$

$x = 0 \rightarrow -2(0) + 6y = -3 \rightarrow y = -3/6 \rightarrow y = -½ \rightarrow (0,-½)$

$y = 0 \rightarrow -2x + 6(0) = -3 \rightarrow -2x = -3 \rightarrow x = 3/2 \rightarrow (3/2,0)$

L_3: $x - 3y = 0$

$x = 0 \rightarrow 0 - 3y = 0 \rightarrow -3y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$

$y = 0 \rightarrow x - 3(0) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$

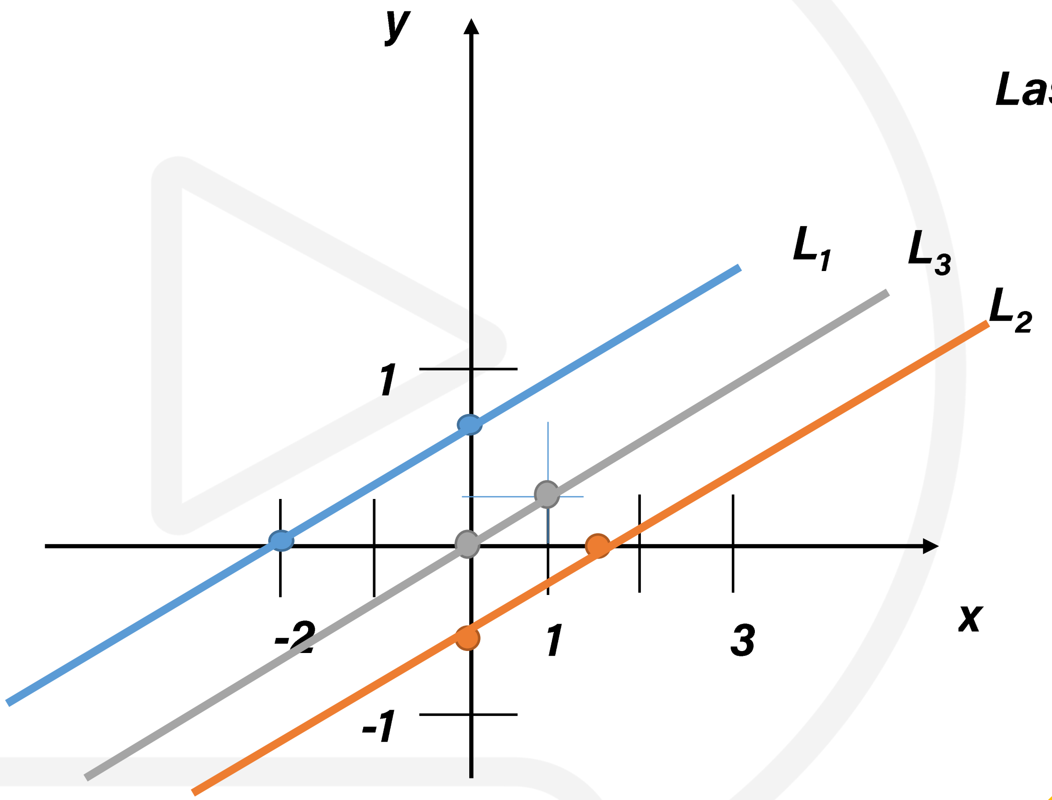
$x = 1 \rightarrow 1 - 3y = 0 \rightarrow -3y = -1 \rightarrow y = 1/3 \rightarrow (1,1/3)$

Dadas las rectas L_1: $-x + 3y = 2$, L_2: $-2x + 6y = -3$, L_3: $x- 3y = 0$. Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

L_1: $-x + 3y = 2$
$(0,2/3)$
$(-2,0)$
L_2: $-2x + 6y = -3$
$(0,-½)$
$(3/2,0)$
L_3: $x - 3y = 0$
$(0,0)$
$(1,1/3)$



Las rectas son paralelas

Dadas las rectas L_1: $-x + 3y = 2$, L_2: $-2x + 6y = -3$, L_3: $x- 3y = 0$. Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN