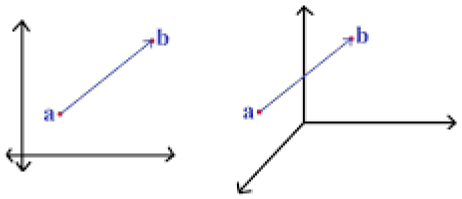
ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL



ÁLGEBRA VECTORIAL: VECTORES EN R^2 Y EN R^3

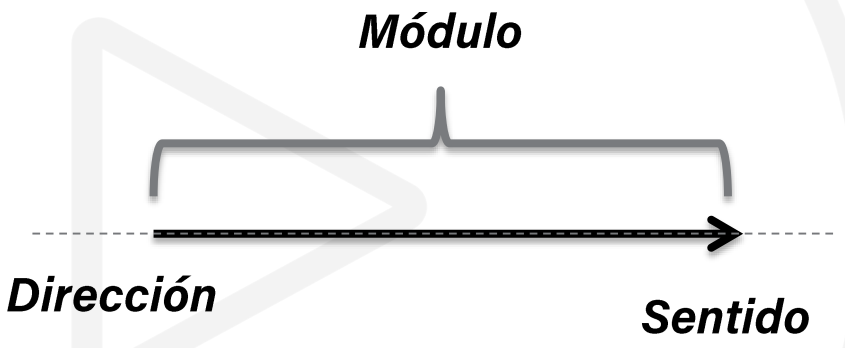
ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)

EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

VECTORES EN R^2 Y EN R^3

Un vector es un segmento orientado:



Consta de tres partes:

1) ***Módulo: Medida del vector***
2) ***Dirección: La recta que lo contiene***
3) ***Sentido: Hacia donde se dirige.***

El Módulo de un vector se determina calculando la distancia entre el origen y el extremo del mismo.

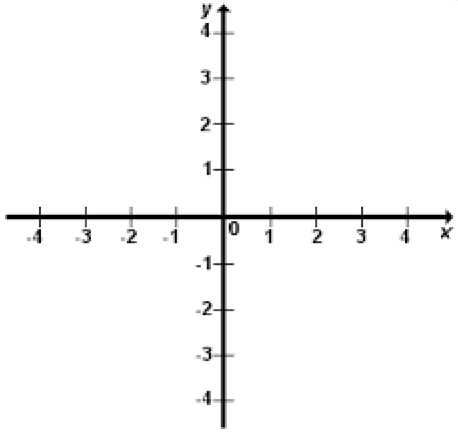
En el caso de R^2, si el origen es el punto (x_1,y_1) y el extremo es el punto (x_2,y_2), el módulo del vector sería:

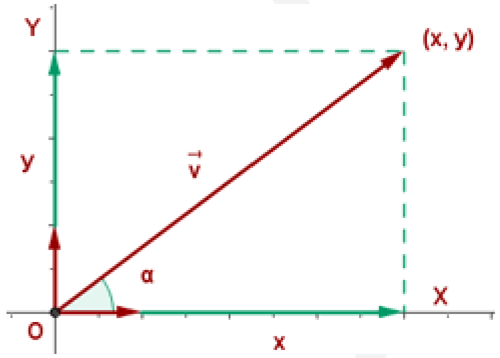
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En el caso de R^3, si el origen es el punto (x_1,y_1,z_1) y el extremo es el punto (x_2,y_2,z_2), el módulo del vector sería:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

VECTORES EN R^2





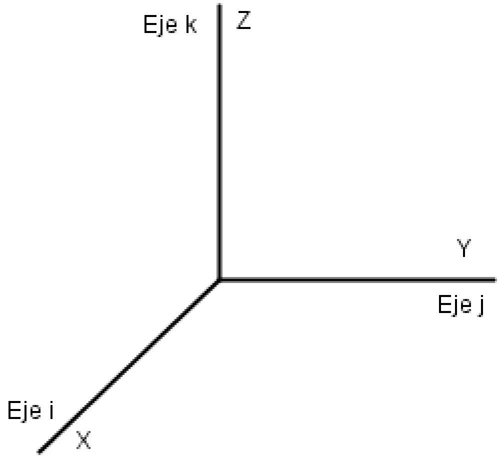
Para expresar un vector en R^2, se utilizan las coordenadas del extremo y se considera que su origen es el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

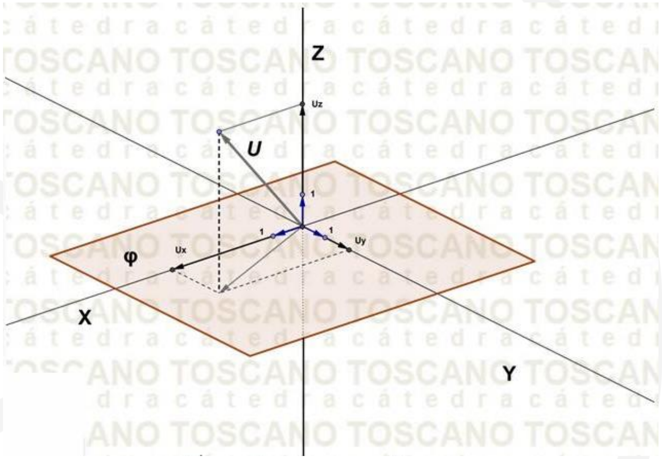
Si las coordenadas del extremo del vector u son (u_x, u_y), entonces el vector quedaría representado por esas coordenadas.

Se puede decir que ese vector $\vec{U}$, es el vector asociado al punto U.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

VECTORES EN R^3



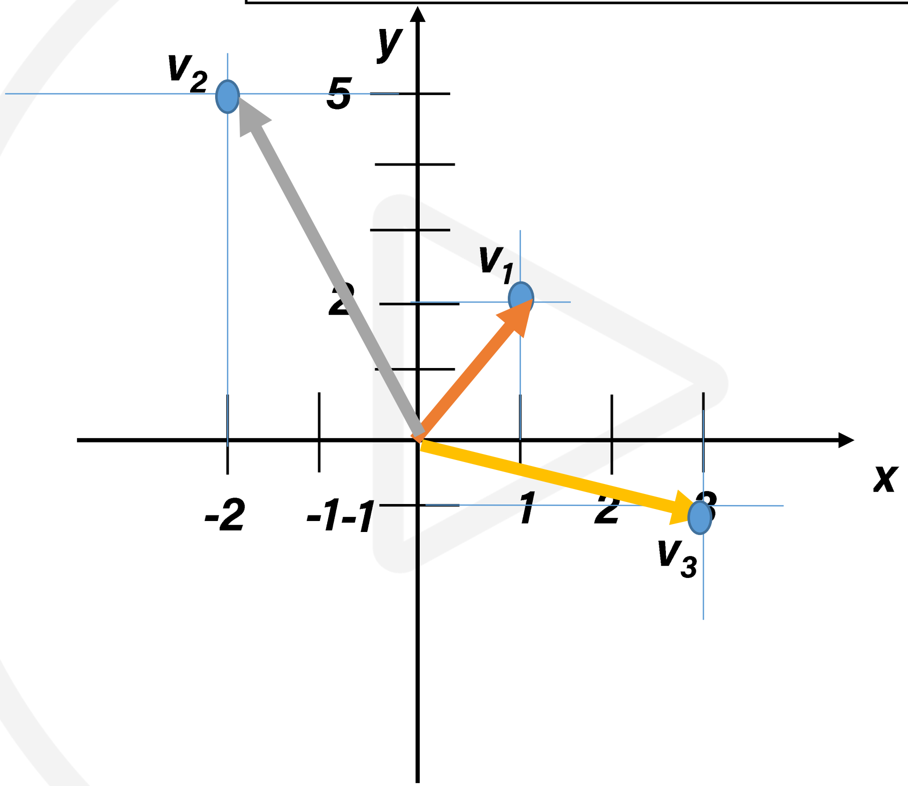


Para expresar un vector en R^3, se utilizan las coordenadas del extremo y se considera que su origen es el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

Si las coordenadas del extremo del vector u son (u_x, u_y, u_z), entonces el vector quedaría representado por esas coordenadas.

Se puede decir que ese vector $\vec{U}$, es el vector asociado al punto U.

EJERCICIO

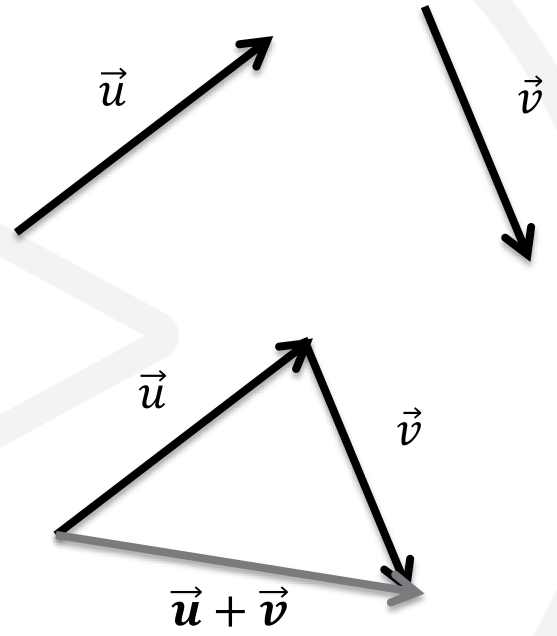


Dados en R^2 los vectores $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-2,5)$ y $v_3 = (3,-1)$; graficarlos.

SUMA DE VECTORES

Suma geométrica:

Los vectores se pueden sumar geométrica y analíticamente.



Suma analítica:

Se suman las respectivas coordenadas cartesianas.

Si $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ ***y*** $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$***, entonces:***

$$\vec{u}+\vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

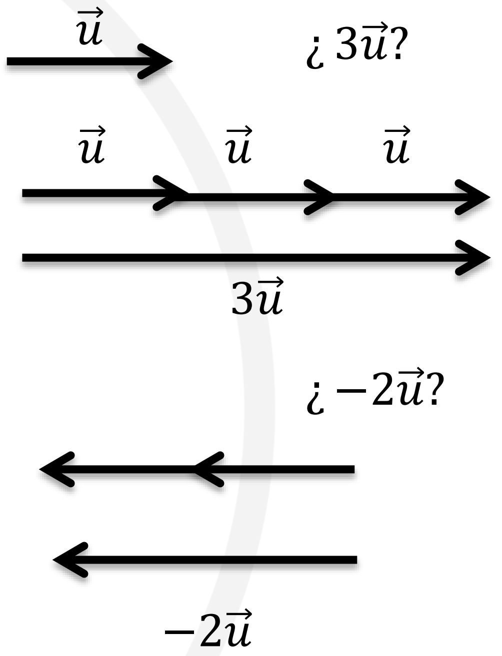
Una cantidad escalar es aquella que queda definida sólo por su magnitud.

Se puede multiplicar un escalar por un vector.

El resultado es un vector con el mismo sentido que el original si el escalar es positivo.

Si el escalar es negativo, el resultado será un vector con sentido contrario.

EJEMPLO GEOMÉTRICO:



De manera analítica, se multiplica el escalar por cada una de las coordenadas del vector. Si λ es un escalar y $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ un vector, entonces:

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

Si $\lambda = 7$ y $\vec{u} = (-1, 6, -8)$, entonces:

$$7 \cdot \vec{u} = 7 \cdot (-1, 6, -8) = (-7, 42, -56)$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

PRODUCTOS ENTRE VECTORES

Hay dos tipos de Productos de Vectores:

Producto Escalar: ***El resultado es un Escalar.***

Se puede calcular de dos formas:

1) ***Si $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$, entonces:***

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta.$

$|\vec{u}|$ es el módulo del vector, que se determina de la siguiente forma:

$$|\vec{u}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$$

θ es el ángulo que forman los vectores.

Ejemplo:

Si $\vec{u} = (-7,1,-6)$ y $\vec{v} = (8,-7,4)$, entonces:

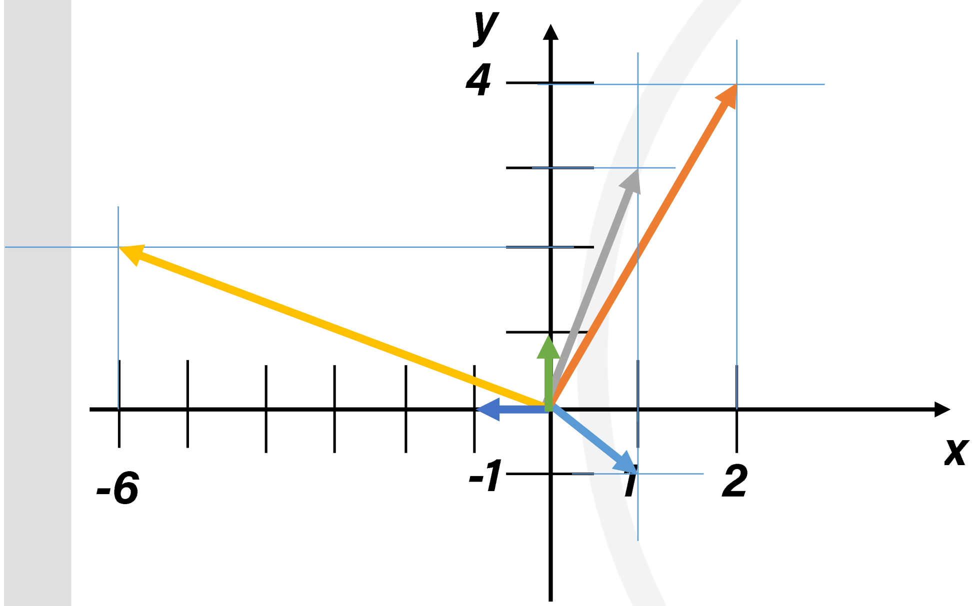
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-7) \cdot 8 + 1 \cdot (-7) + (-6) \cdot 4 = -56 - 7 - 24 = -87$$

PRODUCTOS ENTRE VECTORES

Importante:
Si dos vectores son perpendiculares ($\theta = 90°$), entonces el producto escalar entre ellos es igual a cero, o, uno de los vectores es el vector nulo $\vec{0} = (0,0,0)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{u}\ es\ perpendicular\ a\ \vec{v} \\ \vec{u} = \vec{0}\ o\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

EJERCICIO



Producto escalar:

(1,-1)·(2,4) = 1(2) + (-1)(4) = 2 – 4 = -2 $\neq$ 0 (No son ortogonales)

(1,3)·(-6,2) = -6 + 6 = 0 (Son ortogonales)

(-1,0)·(0,1) = 0 + 0 = 0 (Son ortogonales)

En cada caso, graficar los vectores de R^2 involucrados, calcular el producto escalar indicado y determinar si son ortogonales:

(1,-1)·(2,4); (1,3)·(-6,2); (-1,0)·(0,1).

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

PRODUCTOS ENTRE VECTORES

Producto Vectorial: ***El resultado es un Vector.***

Si $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores en R^3, el producto vectorial v x w se define como el vector:

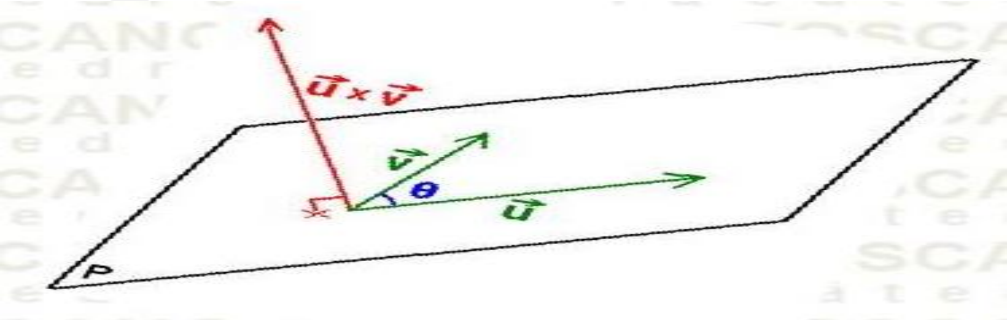
$$v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

Otra forma de calcularlo es usando determinantes:

$$vxw = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$i(v_2w_3 - v_3w_2) - j(v_1w_3 - v_3w_1) + k(v_1w_2 - v_2w_1)$$

La dirección del vector resultado es perpendicular al plano que forman los vectores que se multiplican.



ALEJANDRÍA ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

$$v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$(1,3,5) \times (3,0,-2) = (3\cdot(-2)-5\cdot 0, 5\cdot 3-1\cdot(-2), 1\cdot 0-3\cdot 3) = (-6,17,-9)$$

$$(-1,2,1) \times (6,1,4) = (2\cdot 4-1\cdot 1, 1\cdot(6)-(-1)\cdot(4), (-1)\cdot 1-2\cdot 6) = (7,10,-13)$$

$$(2,4,-2) \times (-3,6,3) = (4\cdot 3-(-2)\cdot 6, (-2)\cdot(-3)-(2)\cdot(3), (2)\cdot 6-4\cdot(-3)) = (24,0,24)$$

En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de R^3. ¿En qué casos da (0,0,0)?

(1,3,5)x(3,0,-2); (-1,2,1)x(6,1,4); (2,4,-2)x(-3,6,3).

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

$v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$

$(2,4,-2) \times (-3,-6,3) = (4\cdot(3)-(-2)\cdot(-6),(-2)\cdot(-3)-2\cdot(3),2\cdot(-6)-4\cdot(-3)) = (0,0,0)$

Como el producto vectorial es igual a (0,0,0) significa que los vectores son paralelos.

$(0,0,0) \times (1,-1,3) = (0,0,0)$

$(a,b,c) \times (ka,kb,kc) = (b\cdot(kc)-(c)\cdot(kb),(c)\cdot(ka)-a\cdot(kc),a\cdot(kb)-b\cdot(ka)) = (0,0,0)$

En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de R^3. ¿En qué casos da (0,0,0)?

$(0,0,0)\times(1,-1,3)$; $(a,b,c)\times(ka,kb,kc)$.

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN