ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

$$z = 3 + 4i$$

$$\Re(z) = 3 \quad \mathbb{I}(z) = 4$$

NÚMEROS COMPLEJOS: DEFINICIONES Y PROPIEDADES (PARTE 1)

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)
EFRAÍN CAMACHO

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

El conjunto C de los números complejos se define como:

$$C = \{z = a + bi \;/\; a,b \in R,\ i^2 = -1\}$$

La representación z = a + bi se llama forma binómica; a es la parte real de z, se escribe Re(z), y b es la parte imaginaria, se escribe Im(z).

Si z = a + bi y w = c + di, entonces:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

$$z \cdot w = (a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Si z = a + bi, el conjugado de z es $\bar{z} = a - bi$.

El módulo de z es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (es no negativo).

Si se quiere calcular z^{-1}, se utiliza:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Potencias de i:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

EJERCICIO

Dar la forma binómica de z en los casos:

a) $z = 1 - i(2 + i)$

b) $z = (1 + 2i)(3 - i)^2$

c) $z = (3 + 4i)^{-1}$

a) $z = 1 - 2i - i^2 = 1 - 2i - (-1) = 1 - 2i + 1 = 2 - 2i$

b) $z = (1 + 2i)(3 - i)(3 - i) = (1 + 2i)(9 - 3i - 3i + i^2) = (1 + 2i)(9 - 6i - 1) =$

$(1 + 2i)(8 - 6i) = 8 - 6i + 16i - 12i^2 = 8 + 10i + 12 = 20 + 10i$

c) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \rightarrow (3 + 4i)^{-1} = \dfrac{3-4i}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2} = \dfrac{3-4i}{25} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

EJERCICIO

Hallar todos los números complejos z que satisfacen:

$$(1 + i)z + 5 = 2 - 3i$$

Como z es complejo, es de la forma z = a + bi:

$$(1 + i)(a + bi) + 5 = 2 - 3i$$
$$a + bi + ai + bi^2 + 5 = 2 - 3i$$
$$a + (a + b)i - b + 5 = 2 - 3i$$
$$a - b + 5 + (a + b)i = 2 - 3i$$

Se igualan partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{cases} a - b + 5 = 2 \\ a + b = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $2a = -6 \rightarrow a = -6/2 \rightarrow a = -3$

Como $a - b = -3 \rightarrow -3 - b = -3 \rightarrow -b = -3 + 3 \rightarrow -b = 0 \rightarrow b = 0$

$$z = -3 + 0i = -3$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

EJERCICIO

Dar la forma binómica de todos los números complejos z que satisfacen:

$$\bar{z}(z+1)=11+3i$$

Como z es complejo, es de la forma z = a + bi:

$$(a-bi)(a+bi+1)=11+3i \rightarrow a^2+abi+a-abi-b^2i^2-bi=11+3i \rightarrow$$

$$a^2+a+b^2-bi=11+3i$$

Igualando partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{cases} a^2+a+b^2=11 \\ -b=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \\ b=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+a+(-3)^2=11 \\ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+a+9=11 \\ \end{cases}$$

$$a^2+a+9-11=0 \rightarrow a^2+a-2=0$$

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2(1)} \rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$a=\frac{-1\pm 3}{2} \rightarrow a_1=\frac{-1+3}{2}=1;\, a_2=\frac{-1-3}{2}=-2$$

$$z_1=1-3i \text{ y } z_2=-2-3i$$

ALEJANDRÍA
ACADEMIA DIGITAL

GRACIAS POR TU ATENCIÓN