

ÁLGEBRA VECTORIAL: EL PLANO \mathbb{R}^2 Y EL ESPACIO \mathbb{R}^3

ÁLGEBRA CBC (INGENIERÍA)
EFRAÍN CAMACHO

EL PLANO \mathbb{R}^2 Y EL ESPACIO \mathbb{R}^3

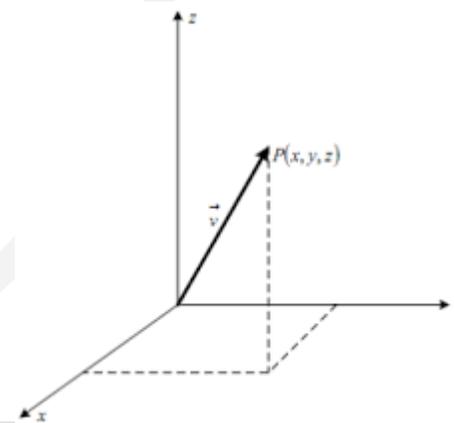
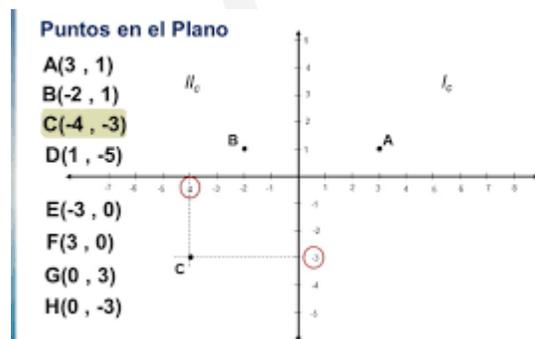
En el plano \mathbb{R}^2 los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas).

$P = (x,y) \rightarrow x$: abscisa o 1° coordenada; y : ordenada o 2° coordenada.

En el espacio \mathbb{R}^3 , cada punto está dado por una terna de números reales:

$$P = (x,y,z)$$

En general, existe \mathbb{R}^n , donde cada punto estará dado por n cantidad de coordenadas.

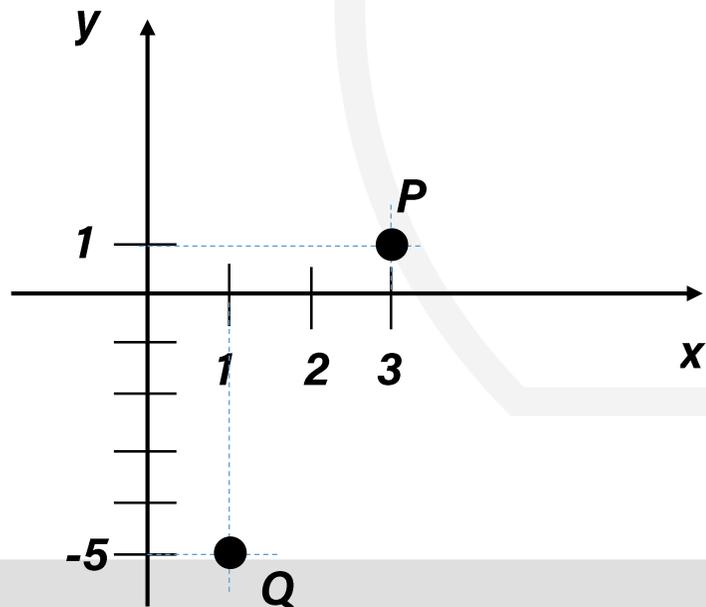


EJERCICIO

Dados los puntos $P = (3,1)$ y $Q = (1,-5) \in \mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3 \cdot P$, $-2 \cdot Q$ y $P + \frac{1}{2}Q$.



$$P + Q = (3,1) + (1,-5) = (4,-4)$$

$$P - Q = (3,1) - (1,-5) = (2,6)$$

$$3 \cdot P = 3 \cdot (3,1) = (9,3)$$

$$-2 \cdot Q = -2 \cdot (1,-5) = (-2,10)$$

$$P + \frac{1}{2}Q = (3,1) + \frac{1}{2}(1,-5) = (3,1) + (\frac{1}{2},-\frac{5}{2}) = (\frac{7}{2},-\frac{3}{2})$$

EJERCICIO

Dados los puntos $P = (3,1)$ y $Q = (1,-5) \in \mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3 \cdot P$, $-2 \cdot Q$ y $P + \frac{1}{2}Q$.

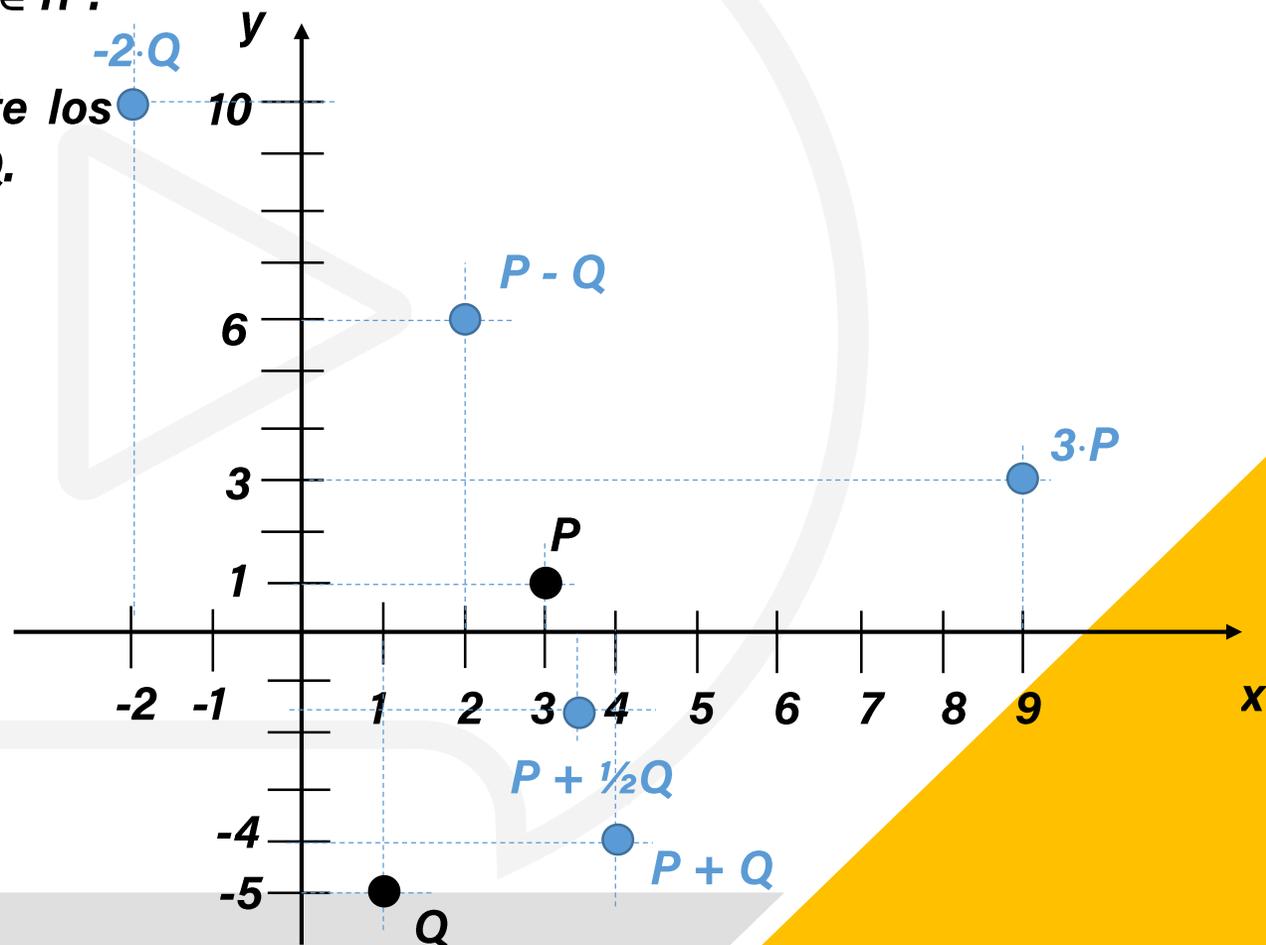
$$P + Q = (4,-4)$$

$$P - Q = (2,6)$$

$$3 \cdot P = (9,3)$$

$$-2 \cdot Q = (-2,10)$$

$$P + \frac{1}{2}Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

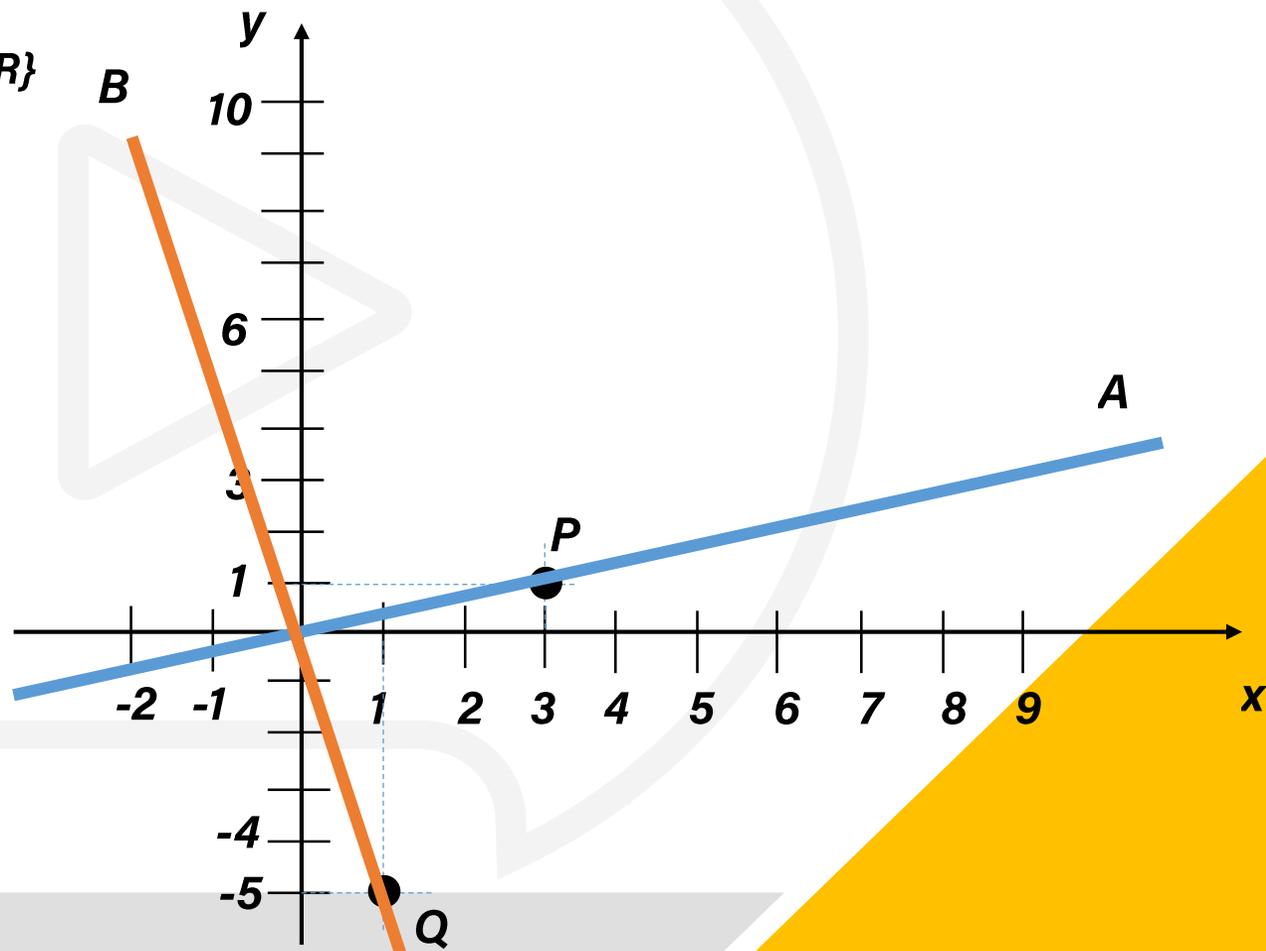


EJERCICIO

Dados los puntos $P = (3,1)$ y $Q = (1,-5) \in \mathbb{R}^2$:
d) Graficar los conjuntos $A = \{a \cdot P \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$
y $B = \{b \cdot Q \in \mathbb{R}^2 / b \in \mathbb{R}\}$

El conjunto A está formado por todos los puntos que están en la recta que pasa por el origen y el punto P.

El conjunto B está formado por todos los puntos que están en la recta que pasa por el origen y el punto Q.



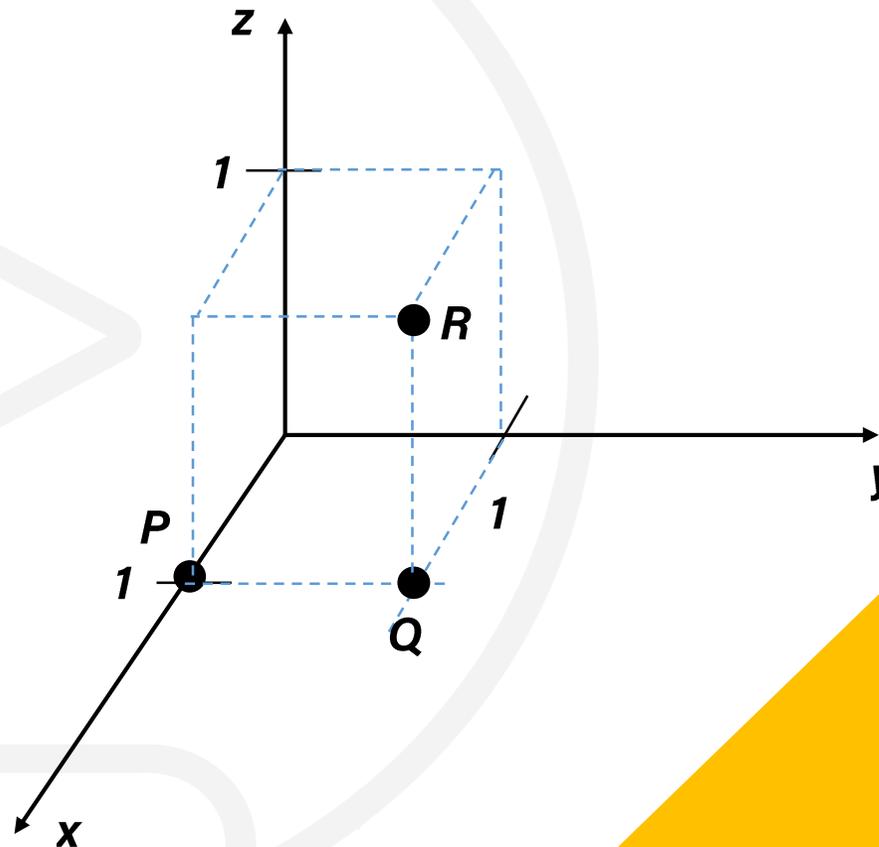
EJERCICIO

Representar gráficamente en \mathbb{R}^3 los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (1,1,0)$, $R = (1,1,1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P + Q$, $T = Q - R$ y $V = \frac{1}{2} \cdot R - P$.

$$S = P + Q = (1,0,0) + (1,1,0) = (2,1,0)$$

$$T = Q - R = (1,1,0) - (1,1,1) = (0,0,-1)$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot R - P = \frac{1}{2} \cdot (1,1,1) - (1,0,0) =$$
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



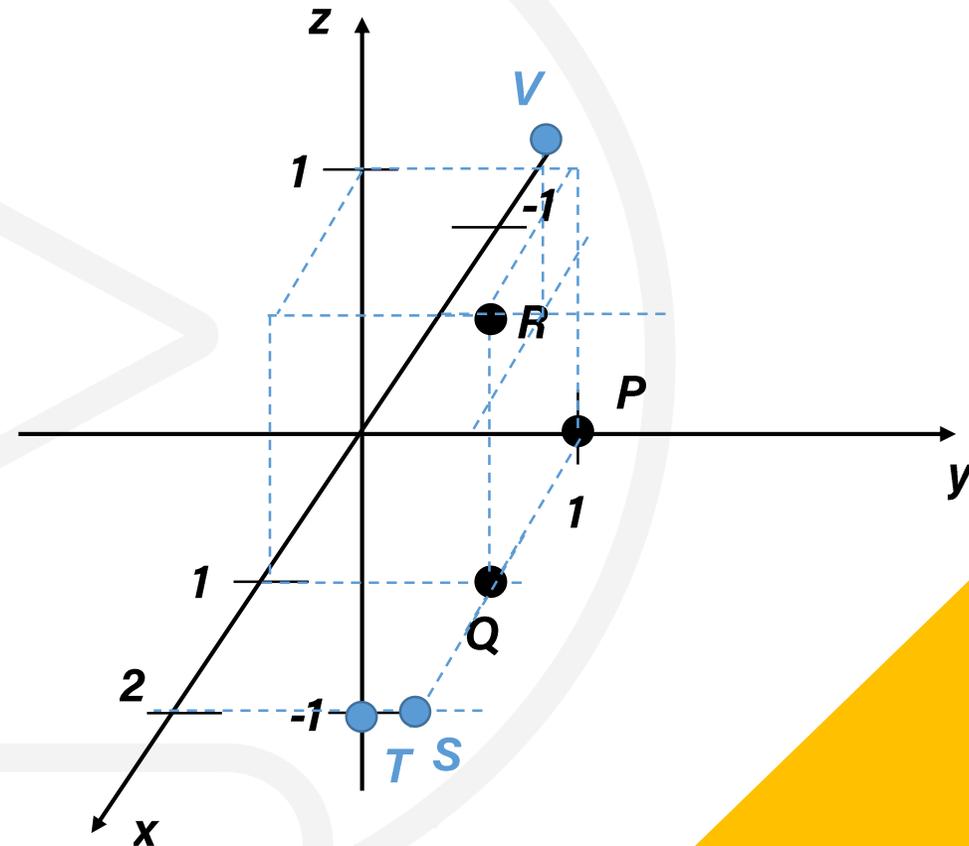
EJERCICIO

Representar gráficamente en R^3 los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (1,1,0)$, $R = (1,1,1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P + Q$, $T = Q - R$ y $V = \frac{1}{2} \cdot R - P$.

$$S = (2,1,0)$$

$$T = (0,0,-1)$$

$$V = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$



EJERCICIO

Hallar, si es posible, a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1,2,3) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$.

$$(1,2,3) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$$

$$(1,2,3) = (a,0,0) + (b,b,0) + (c,c,c)$$

Igualando coordenadas respectivas:

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 2 = b + c \\ 3 = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 2 = b + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = b + 3 \rightarrow b = -1 \\ 1 = a - 1 + 3 \rightarrow 1 = a + 2 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$$a = -1; b = -1; c = 3$$

EJERCICIO

Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.

a) Si $P = (2,3,0,-2)$ y $Q = (1,4,-2,-1) \in R^4$, calcular $R = P + 3 \cdot Q$ y $S = 2 \cdot P - 1/3 \cdot Q$.

b) Si $P = (1,0,-3,0,2)$ y $Q = (0,-1,-2,0,4) \in R^5$, calcular $R = -P + 2 \cdot Q$ y $S = -2 \cdot P - 2/3 \cdot Q$.

$$\begin{aligned} \text{a) } R &= P + 3 \cdot Q = (2,3,0,-2) + 3 \cdot (1,4,-2,-1) = (2,3,0,-2) + (3,12,-6,-3) = (5,15,-6,-5) \\ S &= 2 \cdot P - 1/3 \cdot Q = 2 \cdot (2,3,0,-2) - 1/3(1,4,-2,-1) = (4,6,0,-4) - (1/3,4/3,-2/3,-1/3) = (11/3,14/3,2/3,-11/3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } R &= -P + 2 \cdot Q = -(1,0,-3,0,2) + 2 \cdot (0,-1,-2,0,4) = (-1,0,3,0,-2) + (0,-2,-4,0,8) = (-1,-2,-1,0,6) \\ S &= -2 \cdot P - 2/3 \cdot Q = -2 \cdot (1,0,-3,0,2) - 2/3 \cdot (0,-1,-2,0,4) = (-2,0,6,0,-4) - (0,-2/3,-4/3,0,8/3) = \\ & \quad (-2,2/3,22/3,0,-20/3) \end{aligned}$$



GRACIAS POR TU ATENCIÓN

